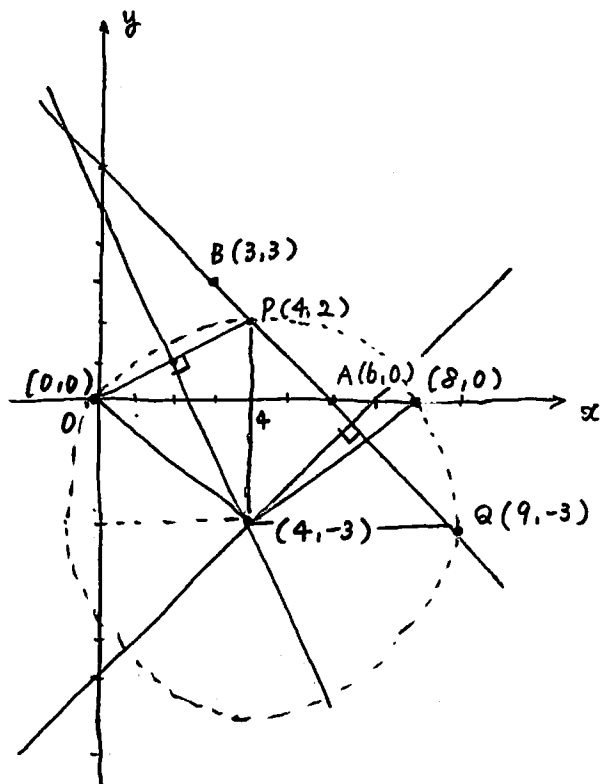
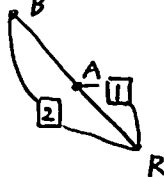


数学Ⅱ・数学B (100点満点)

問題 番号 (配点)	解答記号	正 解	配点	問題 番号 (配点)	解答記号	正 解	配点
第1問 (30)	(ア, イ)	(4, 2)	1	第4問 (20)	$\frac{ア}{イ}$	$\frac{2}{5}$	2
	(ウ, エオ)	(9, -3)	1		ウエ	20	1
	カキ x + ク	$-2x + 5$	3		オ	0	1
	x - ケ	$x - 7$	2		カ, キ, ク, ケ	5, 2, 4, 2	3
	コ, サ	4, 3	3		コ	3	2
	シス	25	2		$\frac{サ}{シ}$	$\frac{2}{3}$	2
	セ	4	3		$\frac{ス}{セ}$	$\frac{1}{2}$	1
	ソ	8	3		$\frac{ソ}{タ}, \frac{チ}{ツ}$	$\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$	3
	$\frac{タチ}{ツ}$	$\frac{49}{2}$	3		テ	2	1
	テ, トナ	1, 16	2		$\frac{トナ\sqrt{ニ}}{ヌ}$	$\frac{15\sqrt{7}}{2}$	2
	ニ	2	1		$\frac{ネ\sqrt{フ}}{ハ}$	$\frac{5\sqrt{7}}{2}$	2
	ヌネ	-1	2	第5問 (20)	ア, イ	7. 0	1
	ノ	0	2		ウ, エオ	4. 00	2
	ハ	4	2		カ, キ	7. 0	1
第2問 (30)	アイ	-a	2		クケ	16	1
	ウ, エ	3, 3	3		コ	2	1
	オ	a	2		サ, シ	9, 7	2
	カ, キ	-1, 3	3		ス	2	2
	ク, ケ, コ	a, 2, 2	3		セ, ソタチ	0. 200	2
	サシ, ス	-2, 2	3		ツテ, ト	12. 4	1
	セ, ソ	2, 2	3		ナニ, ヌネノ	-3. 000	3
	$\frac{タチ}{ツ}, テ$	$\frac{32}{3}, 4$	5		ハ	1	2
	ト, ナ	4, 3	2		ヒ, フハ	4. 84	2
	$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{1}{4}$	3	第6問 (20)	アイ	50	2
第3問 (20)	$\frac{ネ}{ノ}$	$\frac{8}{3}$	1		ウ	6	2
	ア イ	$\frac{3}{2}$	2		エ	8	2
	ウ, エ	2, 3	2		オ	0	2
	オ カ	$\frac{3}{2}$	1		カキクケ	2212	2
	キ, ケ ク	$\frac{9}{4}, 3$	2		コ	0	2
	$\frac{コn}{サ}$	$\frac{3n}{2}$	1		サ	3	2
	シ	2	1		シ	2	2
	$\frac{ス}{セ}$	$\frac{5}{3}$	2		スセ	27	2
	ソ	2	2		ソ	1	2
	タ, チ	b, c	2		(注) 第1問, 第2問は必答, 第3問~第6問のうちから2問 選択, 計4問を解答。		
	ツ, テ	b, b	2				
	ト, ナ, ニ	c, b, b	2				
	ヌ	3	1				



- (1) Pは $(\boxed{4}, \boxed{2})$
 Qは $(\boxed{9}, \boxed{-3})$ である



- (2) OPの中点は $(2, 1)$ であり
 OPの垂直二等分線は傾き -2 より

$$y = -2(x - 2) + 1 \quad \text{だから}$$

$$y = \boxed{-2}x + \boxed{5} \quad \text{--- ①}$$

カキ ケ

また PQの中点は $(\frac{4+9}{2}, \frac{2-3}{2}) = (\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$

であり, PQの垂直二等分線は傾き 1 より

$$y = (x - \frac{13}{2}) - \frac{1}{2} \quad \text{だから}$$

$$y = x - \boxed{7} \quad \text{--- ②}$$

セ

よって ①②より $-2x + 5 = x - 7$ だから

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$y = 4 - 7 = -3. \quad \text{となり中心は } (4, -3)$$

また, 円の半径は $(0, 0)$ と $(4, -3)$ の距離より 5

ゆえに円Cの式は $(x - \boxed{4})^2 + (y + \boxed{3})^2 = \boxed{25}$ となる

コ サ シス

円Cは $x = 4$ に関して対称だから Rは $(8, 0)$ となるから

RはOAを $\boxed{4}:1$ に外分する

セ

解答記号	正解	配点
アイ	42	1
ウエオ	9-3	1
カキク	-25	3
ケ	7	2
コサ	43	3
シス	25	2
セ	4	3

15点

$$\begin{cases} x+y+z=3 & \text{--- ①} \\ 2^x+2^y+2^z=\frac{35}{2} & \text{--- ②} \\ \frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}+\frac{1}{2^z}=\frac{49}{16} & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$X=2^x, Y=2^y, Z=2^z \quad \text{とおく}$$

$$\text{①より} \quad 2^{x+y+z} = 2^3 \quad \text{だから}$$

$$2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = 8 \quad \text{より}$$

$$XYZ = \boxed{8} \quad \text{--- ④}$$

$$\text{また②より} \quad X+Y+Z = \frac{35}{2} \quad \text{--- ⑤}$$

$$\text{③より} \quad \frac{2^y \cdot 2^z + 2^z \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^y}{2^x \cdot 2^y \cdot 2^z} = \frac{49}{16} \quad \text{だから}$$

$$XY+YZ+ZX = \frac{49}{16} XYZ = \frac{49}{16} \times 8 = \frac{49}{2} \quad \text{--- ⑥} \quad \text{となる}$$

$$\text{よって} \quad (t-X)(t-Y)(t-Z)$$

$$= t^3 - (X+Y+Z)t^2 + (XY+YZ+ZX)t - XYZ$$

$$= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{49}{2}t - 8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{35}{2} & \frac{49}{2} & -8 \\ & & -\frac{1}{2} & -\frac{17}{2} & 8 \\ \hline & 1 & -17 & 16 & 0 \end{array}$$

$$= (t - \frac{1}{2})(t^2 - 17t + 16)$$

$$= (t - \frac{1}{2})(t - \boxed{1})(t - \boxed{16}) \quad \text{となる}$$

$$\text{よって} \quad X = \frac{1}{2}, \quad Y = 1, \quad Z = 16 \quad \text{となるのである}$$

$$x = \log_2 \frac{1}{2} = \boxed{-1}$$

$$y = \log_2 1 = \boxed{0}$$

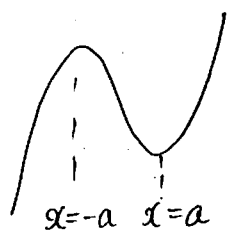
$$z = \log_2 16 = \boxed{4} \quad \text{となる}$$

解答記号	正解	配点
㇏	8	3
㇏㇏	492	3
㇏㇏㇏	116	2
ニ	2	1
㇏㇏	-1	2
ノ	0	2
ハ	4	2

15点

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3 \text{ より}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 \\ = 3(x+a)(x-a)$$



$a > 0$ より $x = \boxed{-a}$ で極大値をとり、その値は

$$f(-a) = -a^3 + 3a^3 + a^3 = \boxed{3a^3}$$

$x = \boxed{a}$ で極小値をとり、その値は

$$f(a) = a^3 - 3a^3 + a^3 = \boxed{-a^3}$$

$(-a, 3a^3)$ と $(a, -a^3)$ と $(0, 0)$ を通る放物線は

$$y = px^2 + qx \text{ とおける}$$

$$(a, -a^3) \text{ を通るから } -a^3 = pa^2 + qa \quad \text{--- ①}$$

$$(-a, 3a^3) \text{ を通るから } 3a^3 = pa^2 - qa \quad \text{--- ② がなりたつ}$$

$$\text{①} + \text{② より} \quad 2a^3 = 2pa^2 \text{ なる}$$

$$a > 0 \text{ より } a = p \text{ である}$$

$$\text{よって ① は } -a^3 = a^3 + qa \text{ より}$$

$$qa = -2a^3$$

$$a \neq 0 \text{ より } q = -2a^2$$

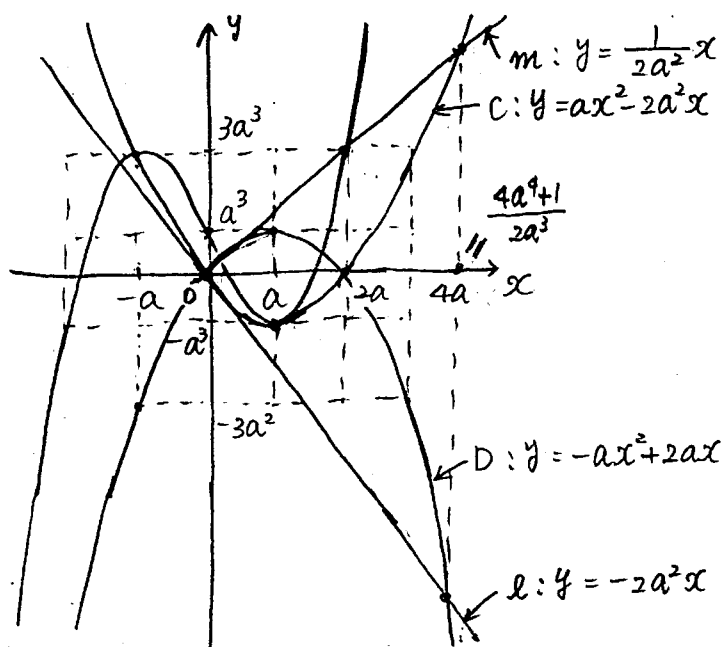
$$\text{よって C の方程式は } y = \boxed{a}x^2 - \boxed{2a^2}x \quad (= ax(x-2a)) \text{ となる}$$

$$\text{ここで } y' = 2ax - 2a^2 \text{ より}$$

$$x = 0 \text{ で } y' = -2a^2 \text{ なる}$$

$$\text{原点における接線 } l \text{ は } y = \boxed{-2a^2}x \text{ である}$$

$$\text{また } l \text{ に垂直な直線 } m \text{ は } y = \frac{1}{\boxed{2a^2}}x \text{ である}$$



C と x 軸対称な放物線 D は

$$D: y = -ax^2 + 2a^2x \text{ なる}$$

D と l の交点の x 座標は

$$-ax^2 + 2a^2x = -2a^2x \text{ より}$$

$$-ax^2 + 4a^2x = 0$$

$$-ax(x-4a) = 0$$

$$\text{よって } x = 0, 4a$$

D と l で囲まれた面積 S は

$$S = a \times \frac{(4a)^3}{6} = \frac{64a^4}{6} = \boxed{\frac{32}{3}}a^4$$

$$(S = -a \int_0^{4a} x(x-4a) dx \text{ であるから})$$

また C と m の交点の x 座標は

$$ax^2 - 2a^2x = \frac{1}{2a^3}x \text{ より}$$

$$ax \left\{ x - \left(2a + \frac{1}{2a^3} \right) \right\} = 0$$

$$\text{よって } x=0 \text{ と } x = 2a + \frac{1}{2a^3} = \frac{4a^4 + 1}{2a^3} \text{ となる}$$

C と m で囲まれた面積を T とすると $S = T$ となるときは

$$T = -a \int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}} x \left(x - \frac{4a^4+1}{2a^3} \right) dx \text{ と } S = -a \int_0^{4a} x(x-4a)dx \text{ が等しくなるので}$$

$$\frac{4a^4+1}{2a^3} = 4a \text{ のときとなるから}$$

$$4a^4 + 1 = 8a^4 \text{ より}$$

$$4a^4 = 1$$

$$a^4 = \frac{1}{4} \text{ のときであり}$$

$$\text{このとき } S = T = \frac{32}{3}a^4 = \frac{32}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{3} \text{ のときである}$$

解答記号	正解	配点
ア	-a	2
ウ	33	3
オ	a	2
カ	-3	3
ク	a22	3
サ	-22	3
セ	22	3
タ	3234	5
ト	43	2
ニ	14	3
ネ	83	1

30点

$$(1) \quad p_1 = 3, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 1 \quad \text{--- ①}$$

①の両辺から $\frac{3}{2}$ をひいて

$$p_{n+1} - \boxed{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{3}{2} \right) \quad \text{より}$$

$$\left\{ p_n - \frac{3}{2} \right\} \text{ は初項 } p_1 - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列だから

$$p_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad \text{より}$$

$$p_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\boxed{2} \cdot \boxed{3}^{n-2}} + \boxed{\frac{3}{2}} \quad \text{オ と カ と 変換}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \sum_{k=1}^n p_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{k-2}} + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{\frac{3}{2} \{ 1 - (\frac{1}{3})^n \}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2} n \\ &= \boxed{\frac{9}{4}} \left(1 - \frac{1}{\boxed{3}^n} \right) + \frac{\boxed{3} n}{\boxed{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} c = \frac{1}{3}c + 1 \\ \frac{2}{3}c = 1 \\ c = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

解答記号	正解	配点
ア 1	3 2	2
ウ 1	2 3	2
オ カ	3 2	1
キ ケ	9 4 3	2
コ サ	3 2	1
シ	2	1
ス セ	5 3	2
ソ	2	2
タ チ	6 6	2
ツ テ	6 6	2
ト ナ ニ	6 6 6	2
ヌ	3	1
		20 点

$$(2) \quad a_4 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} = \frac{3+3}{3} = \boxed{2} \quad \text{シ}$$

$$a_5 = \frac{a_2 + a_3}{a_4} = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$a_6 = \frac{a_3 + a_4}{a_5} = \frac{3+2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}} \quad \text{ス と セ}$$

よって $a_n = a_{2n-1} = 3$ と推定できる

これを数学的帰納法 $\boxed{\text{ヨ}} \text{ ②}$ で示す。

[I] $n=1$ のとき $a_1 = a_2 = 3$ だから $a_{n+1} = a_n$ はなりたつ。

[II] $n=k$ のとき (k は自然数) $a_{k+1} = a_k$ --- ⑤ がなりたつとすると

$n = k+1$ のとき

②の n に $2k$ を代入すると

$$a_{2k+3} = \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{a_{2k+2}} \quad \text{より}$$

$$b_{k+2} = \frac{c_k + \boxed{b}_{k+1}}{\boxed{c}_{k+1}} \quad \text{--- ⑥ かなりたつ}$$

また ②の n に $2k-1$ を代入すると

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{a_{2k+1}} \quad \text{より}$$

$$c_{k+1} = \frac{\boxed{b}_k + c_k}{\boxed{b}_{k+1}} \quad \text{--- ⑦ かなりたつ}$$

⑦を⑥に代入して

$$b_{k+2} = \frac{c_k + b_{k+1}}{b_k + c_k} = \frac{(\boxed{c}_k + \boxed{b}_{k+1}) \boxed{b}_{k+1}}{b_k + c_k}$$

⑤より $b_{k+1} = b_k$ だから

$$b_{k+2} = \frac{(c_k + b_k) b_{k+1}}{b_k + c_k} = b_{k+1} \quad \text{かなりたつので}$$

$b_n = b_{n+1}$ は $n = k+1$ でもなりたつ

よってすべての自然数 n で $b_n = 3$ はなりたつ。

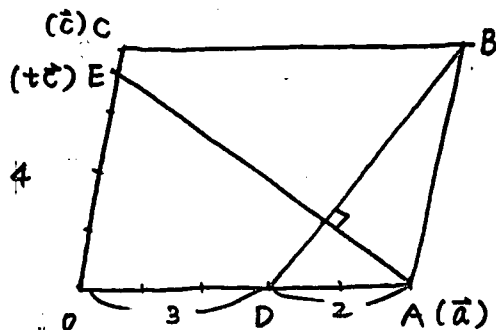
また ②の n を $2n-1$ におきかえてもなりたつから

$$a_{2n+2} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_{2n+1}} \quad \text{であり} \quad b_n = a_{2n-1} = 3 \quad \text{より}$$

$$a_{2n+2} = 1 + \frac{1}{3} a_{2n} \quad \text{となり}$$

$$c_1 = a_{2 \times 1} = \boxed{3} \quad \text{であることから (1) より}$$

$$c_n = a_{2n} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} + \frac{3}{2} \quad \text{となる}$$



$$(1) \vec{AE} = t\vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{DB} = \left[\frac{2}{5} \right] \vec{a} + \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= 5 \times 4 \times \cos \theta \\ &= \boxed{20} \cos \theta \\ &\text{ウエ.} \end{aligned}$$

$$\text{また } \vec{AE} \cdot \vec{DB} = \boxed{0} \text{ により}$$

$$(t\vec{c} - \vec{a}) \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \vec{c} \right) = 0 \text{ だから}$$

$$-\frac{2}{5}|\vec{a}|^2 + \left(\frac{2}{5}t - 1 \right) \vec{a} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 = 0$$

$$-\frac{2}{5} \times 25 + \left(\frac{2}{5}t - 1 \right) \times 20 \cos \theta + t \times 16 = 0$$

$$(16 + 8 \cos \theta)t = 10 + 20 \cos \theta$$

$$t = \frac{10(2 \cos \theta + 1)}{8(\cos \theta + 2)}$$

$$= \frac{\boxed{5}(\boxed{2} \cos \theta + \boxed{1})}{\boxed{4}(\cos \theta + \boxed{2})} \quad \text{となる}$$

(2) 点 E が線分 OC 上にあるとき

$$0 \leq t \leq 1 \text{ であるので}$$

$$0 \leq \frac{5(2 \cos \theta + 1)}{4(\cos \theta + 2)} \leq 1 \text{ であり}$$

$$r = \cos \theta \text{ とおくと } 4(r+2) \text{ は正より}$$

$$0 \leq 5(2r+1) \leq 4(r+2) \text{ であるから}$$

$$0 \leq 5(2r+1) \text{ より}$$

$$r \geq -\frac{1}{2}$$

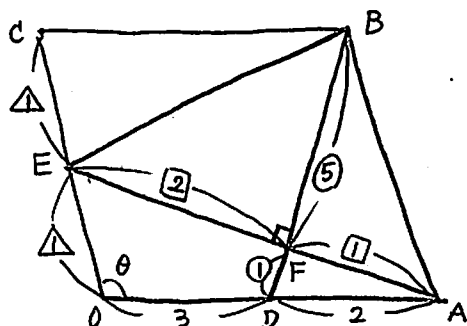
$$10r+5 \leq 4r+8 \text{ より}$$

$$6r \leq 3$$

$$r \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ となる}$$



また ②式の $k = \frac{1}{6}$ より

$$DF : FB = 1 : 5$$

よって $\triangle BEF$

$$= S - \triangle CBE - \triangle OAE - \triangle DAB + \triangle DAF$$

$$= S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}S + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}S \times \frac{1}{6}$$

$$= S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{5}S + \frac{1}{30}S$$

$$= \frac{30 - 15 - 6 + 1}{30} S$$

$$= \frac{1}{3} S$$

$$= \frac{\boxed{\frac{5\sqrt{7}}{2}}}{\text{ハ}} \quad \begin{matrix} \text{ネノ} \\ \text{ハ} \end{matrix}$$

解答記号	正解	配点
アイ	25	2
ウエ	20	1
オ	0	1
カキクケ	5242	3
コ	3	2
サシ	23	2
スセ	12	1
ソタチツ	2316	3
テ	2	1
トナニヌ	1572	2
ネノハ	572	2

20点