(1) $a=p+q$, $b=pq+p$, $c=pq+1$ において $p\geqq 2$, $q\geqq 2$ より $b>c$ である

また $a-b=(p+q)-(pq+p)$

$=q(1-p)<0$ より $a<b$

$a-c=(p+q)-(pq+1)$

$=-(pq-p-q+1)$

$=-(p-1)(q-1)<0$ より $a<c$ だから

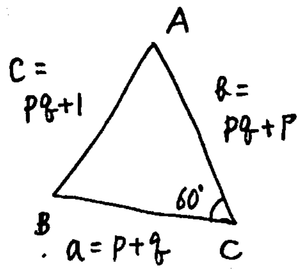
$b>c>a$ がなりたつ。

よって $\boxed{\angle B>\angle C>\angle A}$ となる

(2) $\angle B=60^\circ$ とすると $\angle C$, $\angle A$ はともに 60° より小さくなるので $\angle A+\angle B+\angle C<180^\circ$ となって矛盾.

また $\angle A=60^\circ$ とすると $\angle C$, $\angle B$ はともに 60° より大きくなるので $\angle A+\angle B+\angle C>180^\circ$ となって矛盾

よって $\angle C=60^\circ$ となるから 余弦定理より



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$ がなりたつから

$c^2=a^2+b^2-ab$ より

$c^2-a^2=b(b-a)$

$(c+a)(c-a)=b(b-a)$ がなりたつ.

よって $(pq+1+p+q)(pq+1-p-q)=p(q+1)(pq+p-p-q)$ より

$(p+1)(q+1)(1-p)(1-q)=p(q+1)q(p-1)$

$q+1\neq 0$, $1-p\neq 0$ より $(p+1)(1-q)=-pq$ だから

$p-q+1=0$ より

よって $\boxed{q=p+1}$ —① となる

①より $\begin{cases} a=2p+1 \\ b=p(p+2) \\ c=p(p+1)+1 \end{cases}$ がなりたつ.

ここで. p は整数より $a=2p+1$ は奇数

また. $p(p+1)$ は 連続2整数の積より 偶数だから

$c=p(p+1)+1$ も 奇数 となる

2^n $(n=1,2,3,\cdots)$ は 偶数であるから

$b=p(p+2)=2^n$ がなりたつ。

よって p も $p+2$ も 2の自然数乗 のみを因数にもち.

これをみたすのは $(p, p+2)=(2, 4)$ のみとなるから

$p=2$ となり ①より $q=3$ となる

ゆえに $\boxed{(a, b, c)}=(2p+1, p(p+2), p(p+1)+1)$

$=\boxed{(5, 8, 7)}$ となる