

k は定数とし，媒介変数 t を用いて $x = 2 \sin^3 t, y = k \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) と表される曲線 S を考える．次の問いに 答えよ．

(1) $\frac{dy}{dx}$ を k, t を用いて表せ．ただし $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とする．

(2) 曲線 S が直線 $x + y = 1$ に第 1 象限で接しているとき，接点の座標を (p, q) とする． p, q, k の値を求めよ．また，そのときの t の値 t_0 を求めよ．

(3) (2) で定まる t_0 に対し， $\int_0^{t_0} \cos^4 t \, dt, \int_0^{t_0} \cos^6 t \, dt$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) (2) で定まる p, q, k, t_0 に対し， $0 \leq x \leq p$ で曲線 S ，直線 $x + y = 1$ と y 軸で囲まれる図形の面積を 求めよ．

['13同志社大]