$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ であるから

解答記号	正解	配点
アイ	23	2
ウ	4	2
エ	5	3
オ	2	2
カ	3	2
キ	2	1
クケコ	255	2
サシ	55	2
		16点

$$z = 2x^2+4xy-y^2$$

$$= 2\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\times\frac{1+\cos2\theta}{2} + 2\sin2\theta - \frac{1-\cos2\theta}{2}$$

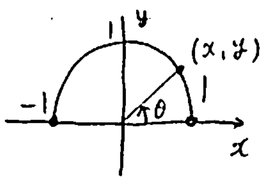
$$= \frac{1}{\underset{ア}{\boxed{2}}} + \frac{\overset{イ}{\boxed{3}}\cos2\theta + \overset{ウ}{\boxed{4}}\sin2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times5\left(\frac{3}{5}\cos2\theta + \frac{4}{5}\sin2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\sin\alpha\cos2\theta + \cos\alpha\sin2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\boxed{5}^{エ}}{2}\sin(2\theta+\alpha) \quad ①$$ （但し $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$）となる

$x^2+y^2=1$，$y\geqq0$ より　$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから



$\alpha\leqq2\theta+\alpha\leqq2\pi+\alpha$　となるので

①により　$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{\underset{オ}{\boxed{2}}}$ のとき

z は最大値 $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\boxed{3}^{カ}$ をとる．

このとき，$\cos2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \overset{キ\ ②}{\boxed{\sin\alpha}}$$ となる

また　$\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$　と　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ により　$0<\theta<\frac{\pi}{4}$　となるから

$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ である．

よって　z が最大値 3 をとるとき

$\cos2\theta = 2\cos^2\theta-1 = \sin\alpha = \frac{3}{5}$ より

$$2\cos^2\theta = \frac{8}{5}$$

$$\cos^2\theta = \frac{4}{5}$$

ゆえに　$x = \cos\theta = \boxed{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$ クケコ

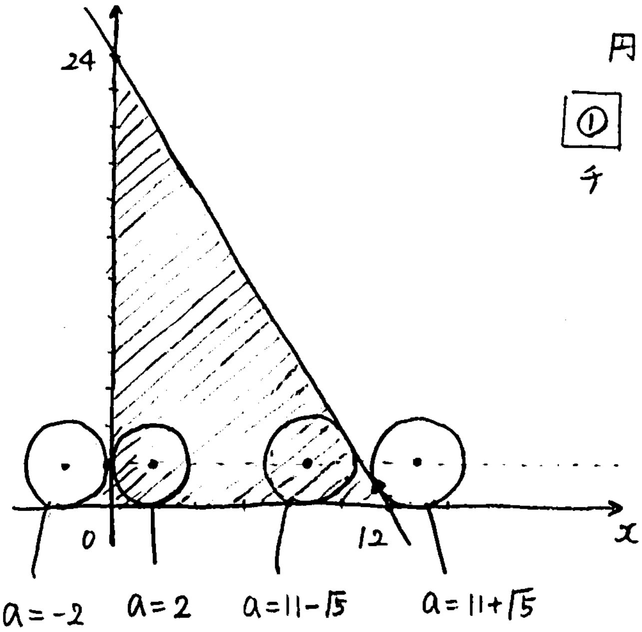
$y=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$ サシ　となる

(1) ②は $x^2-2ax+y^2-4y+a^2 \leqq 0$ より

$(x-\underset{ス}{\boxed{a}})^2+(y-\underset{セ}{\boxed{2}})^2 \leqq \underset{ソ}{\boxed{4}}$ となるので

領域Aは 中心 $(a, 2)$，半径$\underset{タ}{\boxed{2}}$の円の内部および周となる

(2) $2x+y \leqq 24$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の領域Bは以下の斜線部となり



円と接する場合

$\underset{チ}{\boxed{①}}$ 共通部分はAと一致するか
または1点のみとなる

このとき
$2x+y=24$ と $(a, 2)$ との距離が
2より

$2=\dfrac{|2a+2-24|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ だから

$2\sqrt{5}=|2a-22|$

$\sqrt{5}=|a-11|$

よって $a-11=\pm\sqrt{5}$ より

$a=11\pm\sqrt{5}$

図より 共通部が一点のみとなるのは $a=11+\sqrt{5}$ のときとなるから

AとBが共通部分をもつようなaは $\underset{ツテ}{\boxed{-2}} \leqq a \leqq \underset{トナ}{\boxed{11}}+\underset{ニ}{\boxed{\sqrt{5}}}$ となる

CがAと一致するときは $\underset{ヌ}{\boxed{2}} \leqq a \leqq 11-\sqrt{5}$ となる

Cの面積が Aの円の面積の半分となるときは
円の中心が $x=0$ を通るときと $2x+y=24$ を通るときだから

$x=0$ を通るとき $a=\underset{ネ}{\boxed{0}}$

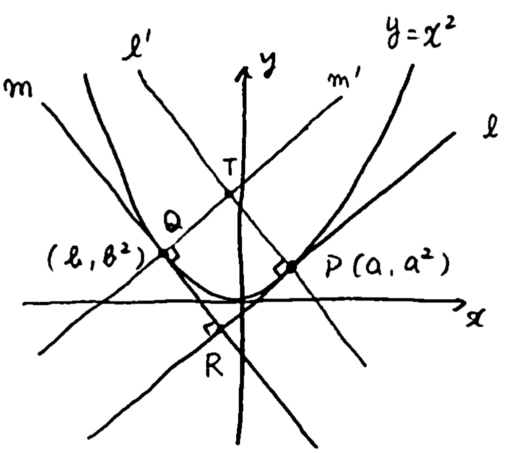
$2x+y=24$ を通るとき $2a+2=24$ より

$2a=22$

$a=\underset{ノハ}{\boxed{11}}$ となる

解答記号	正解	配点
スセソ	a 2 4	3
タ	2	1
チ	1	2
ツテ	-2	1
トナニ	11 5	2
ヌ	2	1
ネ	0	2
ノハ	12	2

14点



$y=x^2$ より $y'=2x$ だから

l, m の傾きはそれぞれ $2a, 2b$ であり

l, m が垂直であるから

$2a \times 2b = -1$ より

$\underset{ア}{\boxed{4}}ab = -1$ である

また l の式は $y = 2a(x-a)+a^2$ より

$y = 2ax - a^2$ ―①

m の式は同様に $y = 2bx - b^2$ ―② となる

①－② より　$0 = 2(a-b)x - (a^2-b^2)$ から

$2(a-b)x = (a+b)(a-b)$

$a \neq b$ より　$x = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1}{\underset{イ}{\boxed{2}}}\left(a - \dfrac{\overset{ウ}{\boxed{1}}}{\underset{エ}{\boxed{4}}a}\right)$

① より　$y = 2a \cdot \dfrac{a+b}{2} - a^2$

$= ab = -\boxed{\dfrac{1}{4}}\begin{matrix}オ\\カ\end{matrix}$ となる.

P での法線 l' の式は　$y = -\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$ より

$y = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2}$ ―③

同様にして m' の式は　$y = -\dfrac{1}{2b}x + b^2 + \dfrac{1}{2}$ ―④ となる

③－④ より　$-\left(\dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{2b}\right)x + (a^2-b^2) = 0$ だから

$\dfrac{b-a}{2ab}x = (a+b)(a-b)$

$a \neq b$ より　$x = -2ab(a+b)$

$= -2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(a - \dfrac{1}{4a}\right)$

$= \dfrac{1}{\underset{キ}{\boxed{2}}}\left(a - \dfrac{\overset{ク}{\boxed{1}}}{\underset{ケ}{\boxed{4}}a}\right)$

また ③ より　$y = -\dfrac{1}{2a}\{-2ab(a+b)\} + a^2 + \dfrac{1}{2}$

$= ab + b^2 + a^2 + \dfrac{1}{2}$

$= (a+b)^2 - ab + \dfrac{1}{2}$

$= \left(a - \dfrac{1}{4a}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2}$

$= a^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16a^2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}$

$= a^2 + \dfrac{1}{\underset{コサ}{\boxed{16}}a^2} + \dfrac{1}{\underset{シ}{\boxed{4}}}$ である.

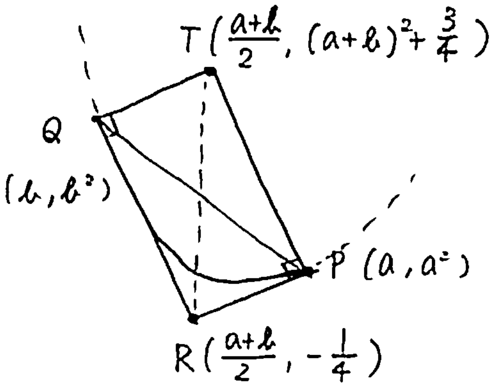
解答記号	正解	配点
ア	4	2
イウエ	214	3
オカ	14	2
キクケ	214	3
コサシ	164	3
スセソ	434	4
タチツ	243	4
テトナ	643	3
ニヌ	16	2
ネ	2	2
ノハ	12	2

30点

T は　$(x, y) = \left(\frac{1}{2}(a+b),\ (a+b)^2+\frac{3}{4}\right)$ より

$a+b=2x$ だから

$y=(2x)^2+\frac{3}{4} = \overset{ス}{\boxed{4}}x^2+\frac{\boxed{3}^{\,セ}}{\boxed{4}_{\,ソ}}$　となる.



よって $TR = 4x^2+\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)$

$= 4x^2+1$　となり

これを底辺とした $\triangle QTR$、$\triangle PTR$ の

面積の和が S_1 だから

$$S_1 = \frac{1}{2}TR\cdot(a-b)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{4\cdot\frac{(a+b)^2}{4}+1\right\}(a-b)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(a+b)^2+1\right\}(a-b)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(a+b)^2-4ab\right\}(a-b)$$
$$= \frac{1}{2}(a-b)^3$$
$$= \frac{1}{\underset{タ}{\boxed{2}}}\left(a+\frac{1}{\underset{チ}{\boxed{4}}a}\right)^{\boxed{3}\,ツ}$$ となる

また放物線 C と PQ で囲まれた面積は，$\frac{1}{6}(a-b)^3 = \frac{1}{\underset{テ}{\boxed{6}}}\left(a+\frac{1}{\underset{ト}{\boxed{4}}a}\right)^{\overset{ナ}{\boxed{3}}} = \frac{1}{3}S_1$

よって　C と l, m で囲まれた図形の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1-\frac{1}{3}S_1 = \frac{\boxed{1}^{\,ニ}}{\boxed{6}_{\,ヌ}}S_1$$ となる

また相加相乗平均の関係より

$$S_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{4a}\right)^3$$
$$\geqq \frac{1}{12}\cdot\left(2\sqrt{a\cdot\frac{1}{4a}}\right)^3 = \frac{1}{12}\left(2\times\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{\underset{ノハ}{\boxed{12}}}$$ （最小値）

等号は $a=\frac{1}{4a}$ より　$a>0$ から $a=\frac{1}{\underset{ネ}{\boxed{2}}}$ のときとなる

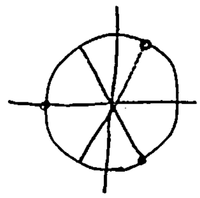
(1) $a_n = 3 + (n-1) \times 2$

$= \underset{ア}{\boxed{2}}n + \underset{イ}{\boxed{1}}$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} 9^k \cdot 3 = \frac{27(9^n - 1)}{9-1} = \frac{\overset{ウエ}{\boxed{27}}(\overset{オ}{\boxed{9}}^n - 1)}{\underset{カ}{\boxed{8}}}$$ となる

(2) $b_n = -2\cos\left(\frac{a_n}{3}\pi\right) + 2$

$= -2\cos\left(\frac{2n+1}{3}\pi\right) + 2$ より



$b_1 = -2\cos\pi + 2 = -2 \times (-1) + 2 = \overset{キ}{\boxed{4}}$

$b_2 = -2\cos\frac{5}{3}\pi + 2 = -2 \times \frac{1}{2} + 2 = 1$

$b_3 = -2\cos\frac{7}{3}\pi + 2 = -2 \times \frac{1}{2} + 2 = \overset{ク}{\boxed{1}}$

$b_4 = -2\cos\frac{9}{3}\pi + 2 = -2 \times (-1) + 2 = \boxed{4}$ ケ

$b_5 = 1$, $b_6 = 1$,

$C_1 = b_1 + 1 = \boxed{5}$ コ

$C_2 = b_2 + 2 = 3$

$C_3 = b_3 + 3 = \boxed{4}$ サ

$C_4 = b_4 + 4 = \boxed{8}$ シ　　となる

また $m = 3, 6, 9, \cdots$ のとき

$b_{m-2} = \underset{ス}{\boxed{4}}$, $b_{m-1} = \underset{セ}{\boxed{1}}$, $b_m = \underset{ソ}{\boxed{1}}$

$C_{m-2} = 4 + m - 2 = m + 2$

$C_{m-1} = 1 + m - 1 = m$

$C_m = 1 + m = m + 1$ 　より

$\underset{タ①}{\boxed{C_{m-1}}} < \underset{チ②}{\boxed{C_m}} < \underset{ツ⓪}{\boxed{C_{m+2}}}$ がなりたつ

$$\sum_{k=1}^{m} c_k = (c_1+c_2+c_3)+(c_4+c_5+c_6)+\cdots+(c_{m-2}+c_{m-1}+c_m)$$

$$= (3+4+5)+(6+7+8)+\cdots+\{m+(m+1)+(m+2)\}$$

となり，初項 3，末項 $m+2$，項数 m の等差数列の和より

$$\sum_{k=1}^{m} c_k = \sum_{k=1}^{m}(k+\underset{テ}{\boxed{2}}) = \frac{m\{3+(m+2)\}}{2} = \frac{m^2+\overset{ト}{\boxed{5}}m}{\underset{ナ}{\boxed{2}}} \text{ となる}$$

さらに $d_n = \dfrac{b_n}{nc_n}$ とすると $c_n = b_n + n$ より

$$d_n = \frac{c_n - n}{nc_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{c_n} \text{ だから}$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_k = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\overset{ニ}{\boxed{1}}}{k} - \frac{\overset{ヌ}{\boxed{1}}}{c_k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+\underset{ネ}{\boxed{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{3}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{m}}\right)$$

$$-\left(\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{\underset{ノ}{\boxed{2}}} - \left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+\underset{ハ}{\boxed{2}}}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2m+3}{(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{3(m+1)(m+2)-(4m+6)}{2(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{m(\overset{ヒ}{\boxed{3}}m+\overset{フ}{\boxed{5}})}{\underset{ヘ}{\boxed{2}}(m+1)(m+2)} \text{ となる.}$$

解答記号	正解	配点
アイ	21	2
ウエオカ	2798	3
キクケ	414	2
コサシ	548	1
スセソ	411	1
タチツ	120	1
テ	2	2
トナ	52	2
ニヌ	11	2
ネ	2	1
ノハ	22	2
ヒフヘ	352	1

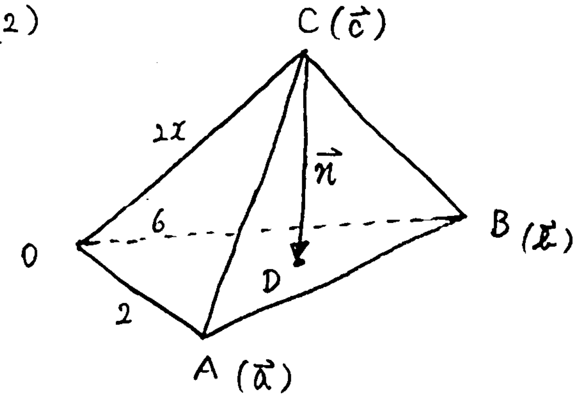
20点

(1) $\cos\angle AOB = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{9}{2\times 6} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$ ア イ

$\sin\angle AOB = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$ ウ エ　である

また　$\triangle OAB = \dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle AOB = \dfrac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times\overset{3}{\cancel{6}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{7}}{2}}$ オカ キ　である

(2)



$\overrightarrow{OD} = s\vec{a} + t\vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = \vec{n}$　とおくと

$\vec{n} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$,

また　$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC$

$= 6\times 2x\times\dfrac{3}{4}$

$= \boxed{9}x$ ク　となるので

$\vec{a}\cdot\vec{n} = \vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})$

$= s|\vec{a}|^2 + t\,\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$

$= 4s + 9t - 4$

$\vec{b}\cdot\vec{n} = \vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})$

$= s\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c}$

$= 9s + 36t - 9x$

$= 9(s + 4t - x)$

$\vec{c}\cdot\vec{n} = \vec{c}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})$

$= s\,\vec{a}\cdot\vec{c} + t\,\vec{b}\cdot\vec{c} - |\vec{c}|^2$

$= \underset{ケ}{\boxed{4}}s + \underset{コ}{\boxed{9}}tx - \underset{サ}{\boxed{4}}x^2$ —— ＊

$\vec{a}\perp\vec{n}$, $\vec{b}\perp\vec{n}$　のとき　$\vec{a}\cdot\vec{n} = \overset{シ}{\boxed{0}}$, $\vec{b}\cdot\vec{n} = \overset{ス}{\boxed{0}}$　であるから

$$\begin{cases} 4s + 9t - 4 = 0 & \text{—①} \\ s + 4t - x = 0 & \text{—②} \end{cases}$$

がなりたつ

①$-4\times$②より　$-7t-4+4x=0$ から

$$t=\frac{\boxed{4}^{ツ}}{7}(x-1)$$

②より　$$s=x-4t=x-\frac{16}{7}(x-1)$$
$$=-\frac{9}{7}x+\frac{16}{7}$$
$$=-\frac{1}{\underset{セ}{\boxed{7}}}(\underset{ソ}{\boxed{9}}x-\underset{タチ}{\boxed{16}})$$ である

$$|\vec{n}|^2=\vec{n}\cdot\vec{n}=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{n}$$
$$=s\vec{a}\cdot\vec{n}+t\vec{b}\cdot\vec{n}-\vec{c}\cdot\vec{n}$$
$$=0+0-4s-9tx+4x^2 \qquad (＊より)$$
$$=\frac{4}{7}(9x-16)-\frac{36}{7}(x-1)x+\frac{28x^2}{7}$$
$$=-\frac{8}{7}x^2+\frac{72}{7}x-\frac{64}{7}$$
$$=-\frac{\boxed{8}^{テ}}{7}(x^2-\underset{ト}{\boxed{9}}x+\underset{ナ}{\boxed{8}})$$
$$=-\frac{8}{7}\left\{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right\}$$
$$=-\frac{8}{7}\left(x-\overset{ニ}{\underset{ヌ}{\frac{\boxed{9}}{\boxed{2}}}}\right)^2+\underset{ネノ}{\boxed{14}}$$

よって $x=\frac{9}{2}$ のとき $|\vec{n}|$ は最大 $\sqrt{14}$ をとり

四面体OABCの体積も最大となる

解答記号	正解	配点
アイ	34	2
ウエ	74	1
オカキ	372	2
ク	9	2
ケコサ	494	3
シ	0	1
ス	0	1
セソタチ	7916	2
ツ	4	2
テトナ	898	3
ニヌネノ	9214	1

20点