

$$(1) \quad ab = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = \boxed{2} \quad \text{ア}$$

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-2} + \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-2} \\ &= \frac{2-2\sqrt{6}}{-1} \\ &= -2+2\sqrt{6} = \boxed{2}(\boxed{-1}+\boxed{\sqrt{6}}) \\ &\quad \text{イ} \quad \text{ロ} \quad \text{カ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 2^2(-1+\sqrt{6})^2 - 2 \times 2 \\ &= 4 \{ (-1+\sqrt{6})^2 - 1 \} \\ &= 4(1-2\sqrt{6}+6-1) \\ &= 4(6-2\sqrt{6}) \\ &= \boxed{8}(\boxed{3}-\boxed{\sqrt{6}}) \\ &\quad \text{カ} \quad \text{キ} \quad \text{ク} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a^2+b^2+4(a+b) &= 8(3-\sqrt{6})+4 \cdot 2(-1+\sqrt{6}) \\ &= 24-8 = \boxed{16} \quad \text{ケコ} \quad \text{から} \quad ab=2 \text{ より} \quad a \neq 0 \text{ から } b = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a^2 + \frac{4}{a^2} + 4\left(a + \frac{2}{a}\right) = 16 \quad \text{より}$$

両辺に a^2 をかけて

$$a^4 + 4 + 4a^3 + 8a - 16a^2 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a^4 + \boxed{4}a^3 - \boxed{16}a^2 + \boxed{8}a + \boxed{4} = 0 \quad \text{をみたす。}$$

サ シス セ ヲ

解答記号	正解	配点
ア	2	1
イウエオ	2-16	2
カキク	836	2
ケコ	16	2
サシセソ	41684	3
10点		

(1) $\sqrt{5} < n < \sqrt{6}$ より $n = 26, 27, \dots, 35$ であるからその個数は

$$35 - 26 + 1 = \boxed{10}$$

9 才

(2) $P = \{28, 32\}$

$Q = \{30, 35\}$

$R = \{30\}$

$S = \{28, 35\}$ であるから $\boxed{P \cap R} = \emptyset$, $\boxed{R \cap Q} = \emptyset$ となる
11 才 ① 7 才 ④

(3) $S \cap \bar{Q} = \{28\}$ より $\boxed{S \cap \bar{Q} \subset P}$
1 才 ①

また $\bar{P} = \{26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35\}$

$\bar{Q} = \{26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34\}$

$\bar{R} = \{26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35\}$

$\bar{S} = \{26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34\}$ であるから

$\bar{Q} \cap \bar{S} = \{26, 27, 29, 31, 32, 33, 34\}$ より

$32 \in \bar{Q} \cap \bar{S}$ であるが $32 \notin \bar{P}$ なのて

$\bar{Q} \cap \bar{S} \subset \bar{P}$ はなりたてない。

$\bar{P} \cup \bar{Q} = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$ より

$28 \in \bar{P} \cup \bar{Q}$ であるが $28 \notin \bar{S}$ なのて

$\bar{P} \cup \bar{Q} \subset \bar{S}$ はなりたてない

$\bar{R} \cap \bar{S} = \{26, 27, 29, 31, 32, 33, 34\}$ より

$\boxed{\bar{R} \cap \bar{S} \subset \bar{Q}}$ はなりたつ

7 才 ④

解答記号	正解	配点
9 才	10	2
11 才	04 or 40	4
1 才	14 or 41	4

10 点

$$y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36 \quad \text{--- ①}$$

$$= (x+a)^2 + 2a^2 - 6a - 36 \quad \text{より 頂点は}$$

$$\left(\boxed{-a}, \boxed{2a^2 - 6a - 36} \right)$$

ア イ ウ エオ

$$(1) \quad y \text{ の値 } p = -27 \text{ のとき } 3a^2 - 6a - 36 = -27 \text{ より}$$

$$3a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0$$

$$a = \boxed{3}, \boxed{-1}$$

カ キク

$$a = 3 \text{ のとき 頂点は } (-3, p - a^2) = (-3, -27 - 9) \\ = (-3, -36)$$

$$a = -1 \text{ のとき 頂点は } (1, p - a^2) = (1, -27 - 1) \\ = (1, -28)$$

よって $a = 3$ のときの ① を x 軸方向に $\boxed{4}$, y 軸方向に $\boxed{8}$ 平行移動

ケ コ

させると $a = -1$ のときの ① のグラフに一致する

$$(2) \quad x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36 = 0 \text{ の 判別式を } D \text{ とすると}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (3a^2 - 6a - 36) \geq 0 \text{ より}$$

$$-2a^2 + 6a + 36 \geq 0$$

$$a^2 - 3a - 18 \leq 0$$

$$(a-6)(a+3) \leq 0$$

$$\text{よって } \boxed{-3} \leq a \leq \boxed{6} \quad \text{--- ②}$$

サ シ ス セ ソ ③ ③

また

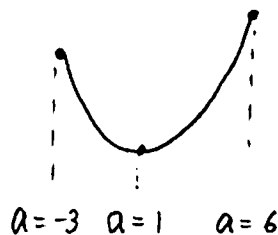
$$p = 3a^2 - 6a - 36$$

$$= 3(a-1)^2 - 39$$

より

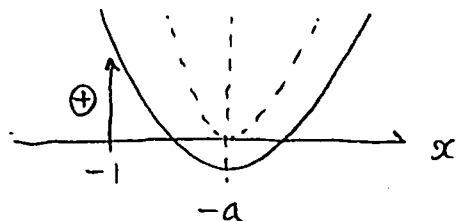
$$a = \boxed{1} \text{ で 最小値 } \boxed{-39}$$

タ チツテ



$$a = \boxed{6} \text{ で 最大値 } 3 \times 5^2 - 39 = 75 - 39 = \boxed{36} \text{ をとる}$$

ト ナニ



Gとx軸との共有点がすべて-1より大きいとき

まず $\frac{D}{4} \geq 0$ より $-3 \leq a \leq 6$ -②

また Gの軸について $x = -a > -1$ より

$a < 1$ -③

また $x = -1$ のとき $y > 0$ より

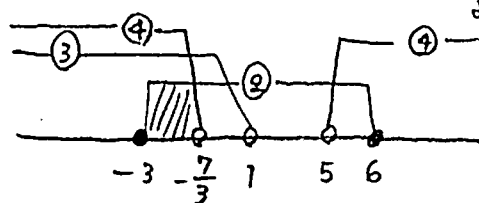
$1 - 2a + 3a^2 - 6a - 36 > 0$ から

$3a^2 - 8a - 35 > 0$

$(a-5)(3a+7) > 0$

$\left(\begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 3 & 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} -15 & 7 \\ -8 & \end{array} \right)$

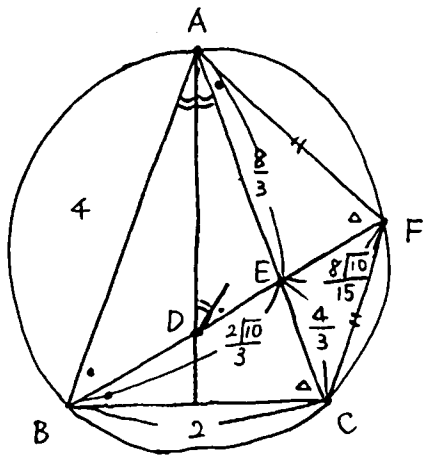
よって $-\frac{7}{3} < a, 5 < a$ -④



②③④ より $\boxed{-3} \leq a < \boxed{\frac{-7}{3}}$ $\begin{matrix} \text{ヌネ} \\ \text{③} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{ヒフ} \\ \text{①} \end{matrix}$ となる

解答記号	正解	配点
アイウエオ	-2636	3
カキク	3-1	2
ケ	4	2
コ	8	2
サシ	-3	1
スセ	33	1
ソ	6	1
タ	1	3
チツテ	-39	1
ト	6	3
ナニ	36	1
ヌネ	-3	2
ノハ	31	1
ヒフハ	-73	2

25点



$$CA^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \cos B$$

$$= 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 16$$

$$\text{よって } CA = \boxed{4}$$

$$\cos A = \frac{4^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 4} = \frac{16 + 16 - 4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8} \quad \text{イウ}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \quad \text{エオカ}$$

$$\triangle ABC \text{ の外接円の半径を } R \text{ とすると } 2R = \frac{2}{\sin A} \quad \text{より}$$

$$R = \frac{1}{\sin A} = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{\overset{\text{キクケ}}{8\sqrt{15}}}{\underset{\text{コサ}}{15}}$$

(1) BE は $\angle ABC$ の内角二等分線だから

$$AE : EC = AB : BC = 4 : 2 = 2 : 1$$

$$\text{よって } AE = \frac{2}{3} \times 4 = \boxed{\frac{8}{3}} \quad \text{シ}$$

また

$$BE^2 = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \times 4 \times \frac{8}{3} \times \cos A \quad \text{より}$$

$$BE^2 = 16 + \frac{64}{9} - \frac{64}{3} \times \frac{7}{8}$$

$$= 16 + \frac{64}{9} - \frac{56}{3} = \frac{16 \times 9 + 64 - 3 \times 56}{9} = \frac{40}{9}$$

$$\text{よって } BE = \boxed{\frac{2\sqrt{10}}{3}} \quad \text{エヤチ}$$

AD は $\angle BAE$ の内角二等分線だから

$$BD : DE = AB : AE = 4 : \frac{8}{3} = 1 : \frac{2}{3} = 3 : 2 \quad \text{より}$$

$$BD = \frac{3}{5} BE = \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{10}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{10}}{5}} \quad \text{ツテトナ}$$

方べきの定理より $BE \cdot EF = AE \cdot EC$ だから

$$\frac{2\sqrt{10}}{3} \times EF = \frac{8}{3} \times \frac{4}{3} \quad \text{より}$$

$$EF = \frac{8 \times 4}{3 \times \frac{2\sqrt{10}}{3}} = \frac{8 \times 4}{2\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

また円周角の定理より $\angle FBC = \angle FAC$

対頂角より $\angle BEC = \angle AEF$ だから

$$\triangle BEC \sim \triangle AEF \quad \text{となり 相似比は } EC : EF = \frac{4}{3} : \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

$$= 1 : \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

よって $\triangle BEC$ と $\triangle AEF$ の面積について

$$\triangle BEC : \triangle AEF = 1 : \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2$$

$$= 1 : \frac{4 \times 10}{25} = 1 : \frac{8}{5} \quad \text{だから}$$

$$\triangle AEF = \frac{8}{5} \triangle BEC \quad \text{より} \quad \triangle BEC = \frac{5}{8} \triangle AEF$$

ゆえに $\triangle BEC$ の面積は $\triangle AEF$ の面積の $\boxed{\frac{5}{8}}$ 倍となる

(3) $\angle ABF = \angle FBC$ より $\widehat{AF} = \widehat{FC}$ であるから $AF = FC$ である

$$\text{また } \angle ADF = \angle DAB + \angle DBA$$

$$= \angle DAE + \angle FBC \quad (\text{内角 = 外角})$$

$$= \angle DAE + \angle FAC \quad (\text{円周角定理})$$

$$= \angle DAF \quad \text{「のこり」}$$

$\triangle ADF$ は $FA = FD$ の二等辺三角形となる

以上のことから

$$\boxed{FA = FC = FD}$$

かなりたつ

ネ ④

解答記号	正解	配点
ア	4	3
イウ	78	3
エオカ	158	3
キクケコサ	81515	3
ミス	83	4
セソタチ	2103	4
ツテトナ	2105	4
ニヌ	58	3
ネ	4	3

30点

(1) $\downarrow\downarrow\swarrow\swarrow$ の順列より $\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \boxed{6}$ (通り)
ア

(2) $\searrow\downarrow\swarrow$ の順列より $3! = \boxed{6}$ (通り)
イ

(3) 3回で $A \rightarrow C$ は $3! = 6$

また 3回で $C \rightarrow D$ は $3! = 6$

よって $6 \times 6 = \boxed{36}$ 通り
ウエ

その確率は $\frac{6^2}{6^6} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$ オ
カキクケ

(4) 6回で $A \rightarrow D$ について

・1の矢印を含むものは $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$ の順列より $\frac{6!}{5!} = \boxed{6}$ (通り)
コ

・2の矢印を含むものは $\nearrow\downarrow\downarrow\downarrow\searrow$ の順列より $\frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = \boxed{30}$ (通り)
サシ

・6の矢印を含むものも $\nwarrow\downarrow\downarrow\downarrow\swarrow$ の順列より $\frac{6!}{4!} = 30$ (通り)

・これ以外には 4の矢印の移動が $\boxed{2}$ 回だけとなり
ス

$\downarrow\downarrow\searrow\swarrow\swarrow\swarrow$ の順列より $\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \boxed{90}$ (通り)
セン

よって 6回で $A \rightarrow D$ となるのは

$6 + 30 + 30 + 90 = \boxed{156}$ (通り) となる
タチツ

解答記号	正解	配点
ア	6	2
イ	6	2
ウエ	36	3
オカキクケ	1/1296	3
コ	6	3
サシ	30	3
ス	2	3
セン	90	3
タチツ	156	3

25点