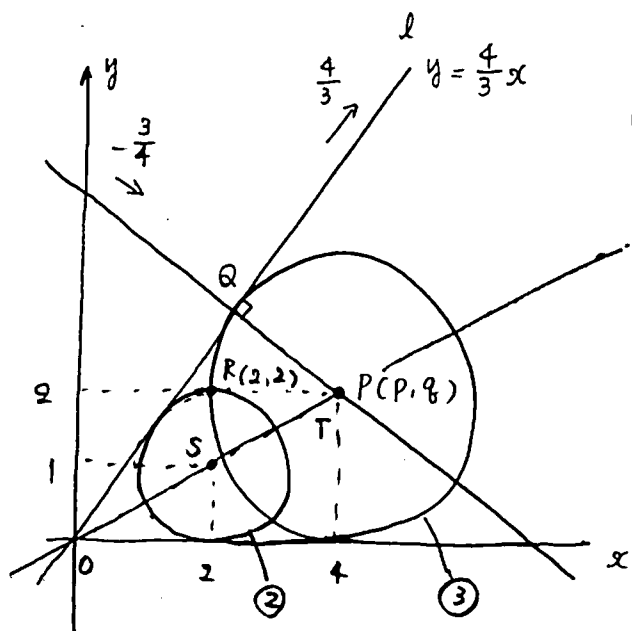




11) Pを通り l に垂直な直線は

傾きが $-\frac{3}{4}$ で (P, q) を通るので

$$y = -\frac{3}{4}(x - p) + q \quad \text{である}$$

これと l との交点 Q の x 座標は

$$\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}p + q \quad \text{をいいて}$$

$$\frac{16 + 9}{12}x = \frac{3p + 4q}{4}$$

$$x = \frac{12}{25} \times \frac{3p + 4q}{4}$$

$$= \frac{3}{25} (\underbrace{3}_{\text{ウ}} \underbrace{p}_{\text{エ}} + \underbrace{4}_{\text{イ}} \underbrace{q}_{\text{オ}})$$

$$\begin{aligned} \text{よって Q の y 座標は } y &= \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \times \frac{3}{25} (3p + 4q) \\ &= \frac{4}{25} (3p + 4q) \quad \text{となる} \end{aligned}$$

円の半径 r は $P(p, q)$ と $4x - 3y = 0$ の距離より

$$r = \frac{|4p - 3q|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{5} |\underbrace{4}_{\text{ア}} \underbrace{p}_{\text{カ}} - \underbrace{3}_{\text{キ}} \underbrace{q}_{\text{ク}}|$$

(2) 円が x 軸に接するとき

$$r = q \quad \text{となるので} \quad q = \frac{1}{5} |4p - 3q| \quad \text{より}$$

$$5q = |4p - 3q|$$

$$\text{両辺 2乗して } 25q^2 = (4p - 3q)^2 \quad \text{より}$$

$$25q^2 = 16p^2 - 24pq + 9q^2$$

$$16p^2 - 24pq - 16q^2 = 0$$

$$2p^2 - 3pq - 2q^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{X}$$

$$(p - 2q)(2p + 1) = 0$$

$$p > 0, q > 0 \quad \text{より} \quad p = \underbrace{2}_{\text{フ}} q \quad \text{となる}$$

よって 円 C の方程式は

$$(x - 2q)^2 + (y - q)^2 = q^2 \quad \text{とておいて}$$

$$(2, 2) \text{ を通るから } (2 - 2q)^2 + (2 - q)^2 = q^2 \quad \text{より}$$

$$4q^2 - 12q + 8 = 0$$

$$q^2 - 3q + 2 = 0$$

$$(q - 1)(q - 2) = 0$$

$$q = 1, 2$$

ゆえに円Cの方程式は

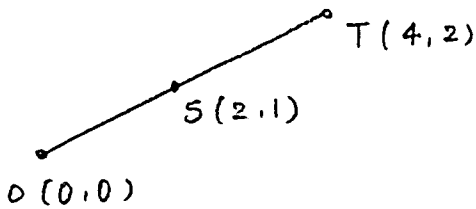
$$(x - \overset{7}{\boxed{2}})^2 + (y - \overset{4}{\boxed{1}})^2 = \overset{3}{\boxed{1}}$$

$$\text{また} \quad (x - \underset{\text{サ}}{\boxed{4}})^2 + (y - \underset{\text{シ}}{\boxed{2}})^2 = \underset{\text{ス}}{\boxed{4}} \quad \text{となる}$$

よって $S(2,1)$, $T(4,2)$ となるから

点OはSTを 1:2に外分する

④セ



解答記号	正解	配点
アイ	34	2
ウエ	34	2
オカ	43	2
キ	2	3
クケコ	211	2
サシス	424	2
セ	4	2

15点

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3 \quad \text{--- ④} \quad \text{について}$$

$$\begin{aligned} (m, n) = (2, 1) \text{ のとき } \log_2 m^3 + \log_3 n^2 \\ = \log_2 2^3 + \log_3 1^2 \\ = \boxed{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m, n) = (4, 3) \text{ のとき } \log_2 m^3 + \log_3 n^2 \\ = \log_2 4^3 + \log_3 3^2 \\ = 3 \cdot \log_2 4 + 2 \times 1 \\ = 3 \times 2 + 2 = \boxed{8} \end{aligned}$$

$$\text{④は } 3 \log_2 m + 2 \log_3 n \leq 3 \text{ より}$$

$$\log_2 m + \frac{2}{3} \log_3 n \leq \boxed{1} \quad \text{--- ⑤ となる}$$

$$n \text{ が自然数のとき } \log_3 n \text{ の最小は } n=1 \text{ のとき } \log_3 1 = \boxed{0}$$

$$\text{また } \log_2 m \text{ も } 0 \text{ 以上 となる}$$

$$\text{よって } 0 \leq \log_2 m \leq 1 \text{ より}$$

$$m = \boxed{1}, \boxed{2} \quad \text{となる}$$

$$m=1 \text{ のとき ⑤は } 0 + \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1 \text{ より}$$

$$\log_3 n \leq \frac{3}{2} \quad \text{ヌネ}$$

$$\text{よって } \log_3 n \leq \log_3 3^{\frac{3}{2}} \text{ より}$$

$$n \leq 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{両辺2乗して } n^2 \leq 3^3 = \boxed{27}$$

$$\text{ゆえに } m=1, 2, 3, 4, 5 \text{ より } n \leq \boxed{5} \quad \text{となる}$$

$$\text{同様に } m=2 \text{ のとき ⑤は } 1 + \frac{2}{3} \log_3 n \leq 1 \text{ より}$$

$$\log_3 n \leq 0$$

$$\text{これをみたす自然数 } n \text{ は } n=1 \text{ のみの } \boxed{1} \text{ 個}$$

$$\text{以上のことから ④をみたす自然数 } m, n \text{ の組は } \boxed{6} \text{ 個 となる}$$

解答記号	正解	配点
ソ	3	1
ヲ	8	1
チツ	23	1
テ	1	1
ト	0	1
ナ	1	1
ニ	2	1
ヌネ	32	1
ノハ	27	2
ヒ	5	2
フ	1	2
ヘ	6	1

15点

$$(1) f(x) = x^3 - px \text{ より}$$

$$f'(x) = \boxed{3}x^{\boxed{2}} - p \text{ であり } x=a \text{ で極値をとるとき}$$

$$f'(a) = 3a^2 - p = \boxed{0} \text{ となる}$$

$$\text{また } p \geq 0 \text{ のとき } f'(a) = 3\left(a - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\right)\left(a + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\right) \text{ となり}$$

$$\boxed{p > 0} \text{ であり } f'(a) = 0 \text{ は異なる2つの実数解をもつので}$$

①エ

$f(x)$ は必ず極値をもつ

$$(2) f'(x) = 3x^2 - p \text{ であり } x = \frac{p}{3} \text{ であり極値をもつので}$$

$$f'\left(\frac{p}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{p}{3}\right)^2 - p = 0 \text{ より}$$

$$3 \times \frac{p^2}{9} - p = 0$$

$$\frac{p}{3}(p-3) = 0$$

$$p > 0 \text{ より } p = \boxed{3}$$

$$\text{このとき } f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \text{ より}$$

$$x = \boxed{-1} \text{ であり極大値をとる}$$

$$x = \boxed{1} \text{ であり極小値をとる}$$

l は $(b, f(b))$ における c の接線だから

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) \text{ より}$$

$$y = (\boxed{3}b^2 - \boxed{3})(x-b) + f(b) \text{ であり点 } A(1, -2) \text{ を通るので}$$

$$-2 = (3b^2 - 3)(1-b) + b^3 - 3b \text{ より}$$

$$\boxed{2}b^3 - \boxed{3}b^2 + 1 = 0 \text{ となる}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \downarrow & 2 & -3 & 0 & 1 \\ & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\text{よって } (b-1)(2b^2-b-1) = 0 \text{ より}$$

$$(2b+1)(b-1) = 0$$

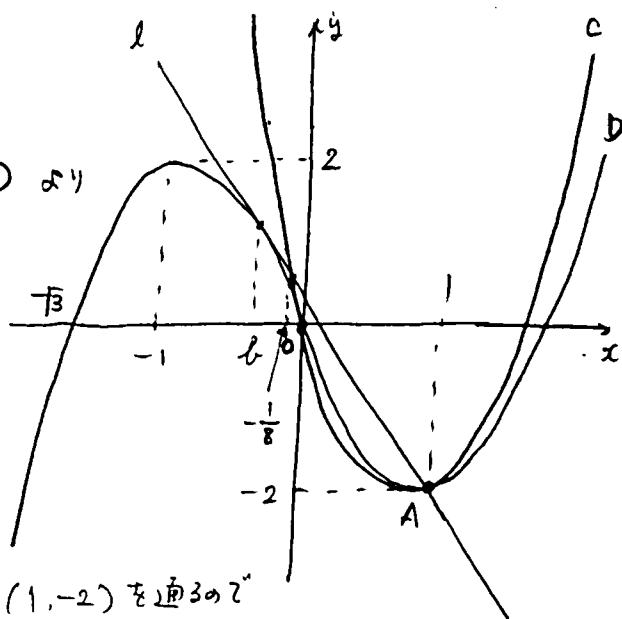
$$\text{これをとくと } b = \boxed{1}, \boxed{\frac{-1}{2}} \text{ となる}$$

$$b = 1 \text{ のとき } f'(1) = 0 \text{ となって不適}$$

$$\text{よって } b = -\frac{1}{2} \text{ のとき } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{9}{4}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8} \text{ であるから}$$

$$\text{接線 } l \text{ の式は } y = -\frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{8} \text{ より}$$

$$y = \boxed{\frac{-9}{4}}x + \boxed{\frac{1}{4}}$$



A を頂点とする放物線は

$$y = a(x-1)^2 - 2 \quad \text{とおいてこれが } (0,0) \text{ を通るから}$$

$$0 = a - 2 \quad \text{より} \quad a = 2.$$

$$\text{よって } D \text{ の方程式は } y = 2(x-1)^2 - 2 \quad \text{より}$$

$$y = \boxed{2}x^2 - \boxed{4}x \quad \text{となる}$$

$$\text{また } L \text{ と } D \text{ を連立にして } 2x^2 - 4x = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4} \quad \text{より}$$

$$8x^2 - 16x = -9x + 1$$

$$8x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$(8x+1)(x-1) = 0$$

$$\text{ゆえに交点の } x \text{ 座標は } x = 1, -\frac{1}{8} \quad \text{となる}$$

よって求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}\right) - (2x^2 - 4x) \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-2x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{7}{8} + \frac{1}{4} = \frac{-16+21+6}{24} = \frac{\boxed{11}}{24} \quad \text{となる}$$

解答記号	正解	配点
ア	32	2
イ	0	2
エ	1	3
オ	3	3
カキク	-11	3
ケコ	33	2
サシ	23	2
セソタ	1-12	3
チツテノナ	-9414	3
ニヌ	24	3
ネノ	11	4

30点

(1)

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

$$6, 15, 28, 45, \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ 9 & 13 & 17 \end{array}$$

$$a_2 = 6 + 9 = \boxed{15} \quad , \quad a_3 = a_2 + 13 = \boxed{28} \quad \text{であり}$$

$$\{a_n\} \text{ の階差数列は } \boxed{4}n + \boxed{5} \text{ である}$$

$$\text{よって } n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+5)$$

$$= 6 + 4 \times \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 5(n-1)$$

$$= 6 + 2n^2 - 2n + 5n - 5$$

$$= 2n^2 + 3n + 1 \quad \text{これは } n=1 \text{ のときもなりたつ。}$$

$$\text{ゆえに } a_n = \boxed{2}n^2 + \boxed{3}n + \boxed{1} \quad \text{となる} \quad \text{--- ①}$$

$$(2) \quad b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}-1} b_n, \quad b_1 = \frac{2}{5} \text{ より}$$

$$b_2 = \frac{a_1}{a_2-1} \times b_1 = \frac{6}{15-1} \times \frac{2}{5} = \frac{\boxed{6}}{\boxed{35}} \quad \text{シス}$$

$$\text{①②より } b_{n+1} = \frac{2n^2+3n+1}{2(n+1)^2+3(n+1)+1-1} b_n$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+7n+5} b_n$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+5)(n+1)} b_n \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{\boxed{2}n + \boxed{1}}{2n + \boxed{5}} b_n \quad \text{なりたつ} \quad \text{--- ③}$$

$$\text{よって } C_n = (2n+1) b_n \quad \text{と } \frac{④}{5} \text{ と}$$

$$C_{n+1} = (2n+3) b_{n+1} \text{ より } \text{③より}$$

$$\frac{C_{n+1}}{2n+3} = \frac{(2n+1)}{(2n+5)} \times \frac{C_n}{2n+1} \quad \text{より}$$

$$(2n+\boxed{5}) C_{n+1} = (2n+\boxed{3}) C_n$$

$$\text{ゆえに } d_n = (2n+\boxed{3}) C_n \quad \text{と } \frac{⑤}{5} \text{ と } d_{n+1} = d_n = \dots = d_1 \text{ となり}$$

$$d_1 = (2 \times 1 + 3) C_1 = (2 \times 1 + 3)(2 \times 1 + 1) b_1 = 5 \times 3 \times \frac{2}{5} = \boxed{6} \quad \text{より}$$

$$\text{よって自然数 } n \text{ について } d_n = 6 \text{ となる}$$

⑤より

$$(2n+3)C_n = d_n = 6 \quad \text{だから}$$

$$C_n = \frac{6}{2n+3}$$

よって④より

$$\frac{6}{2n+3} = (2n+1)b_n \quad \text{だから}$$

$$b_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{\boxed{3}^+}{2n+1} - \frac{\boxed{3}^-}{2n+3} \quad \text{これから}$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

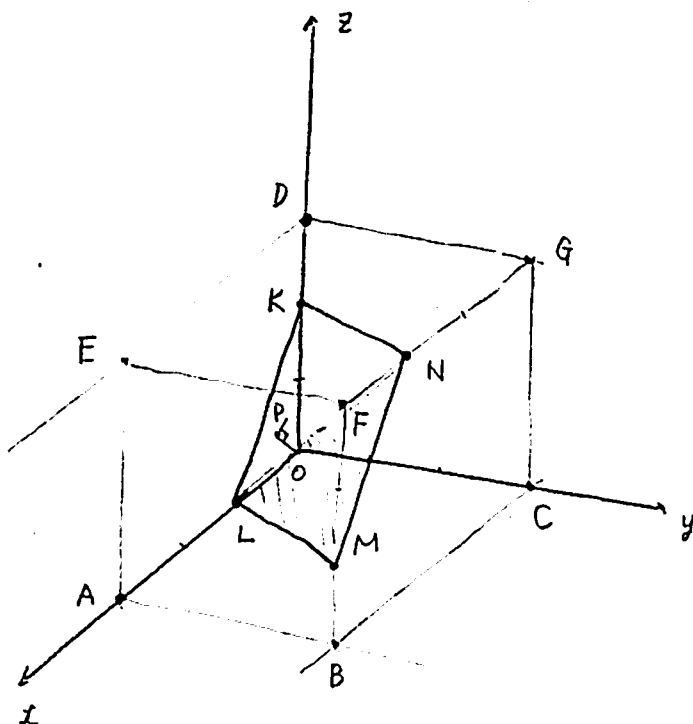
$$= \left(\frac{3}{2 \times 1 + 1} - \frac{\cancel{3}}{2 \times 1 + 3} \right) + \left(\frac{\cancel{3}}{2 \times 2 + 1} - \frac{\cancel{3}}{2 \times 2 + 3} \right) + \left(\frac{\cancel{3}}{2 \times 3 + 1} - \frac{\cancel{3}}{2 \times 3 + 3} \right) + \dots + \left(\frac{\cancel{3}}{2n+1} - \frac{3}{2n+3} \right)$$

$$= \frac{3}{2 \times 1 + 1} - \frac{3}{2n+3}$$

$$= 1 - \frac{3}{2n+3} = \frac{\boxed{2}n}{\boxed{2}n + \boxed{3}} \quad \text{よって}$$

解答記号	正解	配点
アイ	15	1
ウエ	28	2
オカ	45	2
キクケコ	2231	2
サシス	635	1
ヒツタ	215	2
チツ	53	2
テ	3	2
ト	6	2
ナニ	33	2
ヌネノ	223	2

20点



(1) Kは $(0, 0, 2)$

Lは $(1, 0, 0)$ より

$$\begin{aligned}\vec{LK} &= \vec{OK} - \vec{OL} \\ &= (0, 0, 2) - (1, 0, 0) \\ &= (\boxed{-1}, \boxed{0}, \boxed{2}) \\ &\quad \text{ア イ ウ エ}\end{aligned}$$

四角形 KLMN が 平行四辺形 より

$$\vec{LK} = \vec{MN} \quad \text{となる}$$

ア ③

ここで $M(3, 3, s)$, $N(t, 3, 3)$ とおけるから $\vec{MN} = \vec{LK}$ より

$$(t-3, 0, 3-s) = (-1, 0, 2) \quad \text{であるから}$$

$$\begin{cases} t-3 = -1 \\ 3-s = 2 \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} t = \boxed{2} \text{キ} \\ s = \boxed{1} \text{カ} \end{cases} \quad \text{となる}$$

$M(3, 3, 1)$, $N(2, 3, 3)$ より

Nは FG を $1:\boxed{2}$ に内分する

$$\begin{aligned}\vec{LM} &= \vec{OM} - \vec{OL} = (3, 3, 1) - (1, 0, 0) \\ &= (2, 3, 1) \quad \text{だから}\end{aligned}$$

$$\vec{LK} \cdot \vec{LM} = -1 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 1 = \boxed{0}$$

$$|\vec{LK}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{\boxed{5}}$$

$$|\vec{LM}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{\boxed{14}} \quad \text{となるので}$$

(四角形 KLMN の面積) = $2 \times (\triangle LMK)$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{LK}|^2 |\vec{LM}|^2 - (\vec{LK} \cdot \vec{LM})^2}$$

$$= \sqrt{5 \times 14 - 0^2} = \sqrt{\boxed{70}} \quad \text{となる}$$

スセ

(2) $P(p, q, r)$ とおくと

$$\vec{OP} \cdot \vec{LK} = \boxed{0} \text{ より } -p + 2r = 0 \text{ より } p = \boxed{2}r$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} \cdot \vec{LM} = 0 \text{ より } 2p + 3q + r &= 0 \text{ より } q = \frac{1}{3}(-2p - r) \\ &= \frac{1}{3}(-4r - r) \\ &= \boxed{\frac{-5}{3}}r \end{aligned}$$

また $\vec{PL} = (p-1, q, r)$ と $\vec{OP}$ が垂直だから

$$\vec{PL} \cdot \vec{OP} = 0 \text{ より } p(p-1) + q^2 + r^2 = 0 \text{ より}$$

$$2r(2r-1) + \left(-\frac{5}{3}r\right)^2 + r^2 = 0 \text{ だから}$$

$$4r^2 - 2r + \frac{25}{9}r^2 + r^2 = 0$$

$$\frac{70}{9}r^2 - 2r = 0$$

$$\frac{70}{9}r \left(r - \frac{9 \times 2}{70}\right) = 0$$

$$\text{より } r = \boxed{\frac{9}{35}} \text{ と } r = 0$$

$$\therefore \vec{OP} = (p, q, r) = (2r, -\frac{5}{3}r, r)$$

$$= r \left(2, -\frac{5}{3}, 1\right) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OP}| &= r \sqrt{4 + \frac{25}{9} + 1} \\ &= \frac{9}{35} \sqrt{\frac{70}{9}} = \boxed{\frac{3}{35} \sqrt{70}} \end{aligned}$$

より (三角形 OLMN の面積)

$$= \frac{1}{3} (\triangle LMN) \times |\vec{OP}| = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{70}}{2} \times \frac{3 \times \sqrt{70}}{35} = \boxed{1} \text{ と } 0$$

解答記号	正解	配点
アイウエ	-102	2
オ	3	1
カキ	12	2
ク	2	2
ケ	0	1
コ	5	1
サシ	14	1
セ	70	2
ソ	0	1
タチツテ	2-53	2
トナニ	935	2
ヌネハヒ	37035	2
フ	1	1

20点