



円に内接する四角形の対角の和は $180^\circ$ だから

$$\angle BCD = \boxed{60}^\circ$$

$\triangle ABD$ で正弦定理をつかうと 円の半径は2より

$$2 \times 2 = \frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \angle ADB} \text{ がなりたつので}$$

$$BD = 4 \sin 120^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sin \angle ADB = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ であり } \angle ADB \text{ は } 75^\circ \text{ より小さいから}$$

$$\angle ADB = \boxed{45}^\circ$$

よっての二つの角は上図のようになり、 $\triangle BCD$ は  $\angle DBC = 90^\circ$ ,  $\angle DCB = 60^\circ$  より

$$BD : BC = \sqrt{3} : 1 \text{ より } BC = \boxed{2}$$

$\triangle ABD$ で余弦定理より

$$(2\sqrt{3})^2 = AD^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot AD \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ \text{ から}$$

$$12 = AD^2 + 8 + 2\sqrt{2} \cdot AD \text{ より}$$

$$AD^2 + 2\sqrt{2}AD - 4 = 0$$

$$\text{よって } AD = -\sqrt{2} \pm \sqrt{6} \text{ となるが } AD \text{ は正より}$$

$$AD = \boxed{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

ゆえに(四角形ABCDの面積) = ( $\triangle ADB$ の面積) + ( $\triangle BCD$ の面積)

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 2(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}$$

$$= \boxed{3 + \sqrt{3}} \text{ となる}$$