$(x+iy)^2=i$ より

$(x^2-y^2)+(2xy-1)i=0$

ここで，x^2-y^2，$2xy-1$ は共に実数だから

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 & -① \\ 2xy-1=0 & -② \end{cases}$$ がなりたつ

①より $(x+y)(x-y)=0$ だから

$x=\pm y$

i) $x=y$ のとき

②は $2x^2-1=0$ より

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ii) $x=-y$ のとき

②は $-2x^2-1=0$ となって $x^2=-\frac{1}{2}$ で不適．

以上のことから求める (x,y) は

$$\boxed{(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

(別解) $x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと $(0\leqq\theta<2\pi,\ r>0)$

$(x+iy)^2=i$ より

$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi$

$(0\leqq2\theta<4\pi)$

とできるので $r=1$，$2\theta=\frac{\pi}{2},\frac{5}{2}\pi$ より

$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$

よって $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき $x+iy=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$r=1$，$\theta=\frac{5}{4}\pi$ のとき $x+iy=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

以上のことから求める (x,y) は

$$\boxed{(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$