

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$= (r + \frac{1}{r}) \cos \theta + i(r - \frac{1}{r}) \sin \theta \quad \text{であり}$$

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \sin(-\theta) = -\sin \theta \end{cases}$$

この実軸との距離が2以下であるから

$$|(r - \frac{1}{r}) \sin \theta| \leq 2 \quad \text{であり}$$

これが任意の θ であり、 $|\sin \theta| \leq 1$ より

$$|r - \frac{1}{r}| \leq 2 \quad \text{であればよいから}$$

$$-2 \leq r - \frac{1}{r} \leq 2 \quad \text{であればよい}$$

$$r > 0 \text{ より} \quad -2r \leq r^2 - 1 \leq 2r \quad \text{であるから}$$

$$-2r \leq r^2 - 1 \quad \text{かつ} \quad r^2 - 1 \leq 2r \quad \text{である}$$

$$-2r \leq r^2 - 1 \quad \text{を} \leq \text{と} < \text{と}$$

$$r^2 + 2r - 1 \geq 0 \quad \text{より}$$

$$r \leq -1 - \sqrt{2}, \quad -1 + \sqrt{2} \leq r \quad - (1)$$

$$r^2 - 1 \leq 2r \quad \text{を} \leq \text{と} < \text{と}$$

$$r^2 - 2r - 1 \leq 0 \quad \text{より}$$

$$1 - \sqrt{2} \leq r \leq 1 + \sqrt{2} \quad - (2)$$

①かつ②かつ $r > 0$ より、求める r の値の範囲は

$$\boxed{-1 + \sqrt{2} \leq r \leq 1 + \sqrt{2}} \quad \text{である}$$