$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) = 4\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= 2^3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ であるから

$z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ の解のひとつは $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}+\sqrt{2}i$ であり 実部、虚部ともに正であるから

これを z_1 としてよい。

よって $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$ より $\boxed{a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}}$ である

また $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ ① の解は高々3つであり、kを整数とすると

$z^3 = 2^3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= 2^3\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)\right)$

$= 2^3\left(\cos\frac{3+8k}{4}\pi + i\sin\frac{3+8k}{4}\pi\right)$ とできるので

$z = 2\left(\cos\frac{3+8k}{12}\pi + i\sin\frac{3+8k}{12}\pi\right)$ となる ―②

②に $k=1$ を代入すると

$z = 2\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$ ―③

・$k=-1$ を代入すると

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right)$ ―④

となり、③,④ と z_1 はすべて異なる値であるから、この3つが①の3つの解となる

ここで③,④式の z をそれぞれ z_2, z_3 とすると、$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であることから

$\boxed{z_2} = 2\left(\cos\frac{3+8}{12}\pi + i\sin\frac{3+8}{12}\pi\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$= \boxed{z_1\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$.

また $\boxed{z_3} = 2\left(\cos\frac{3-8}{12}\pi + i\sin\frac{3-8}{12}\pi\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

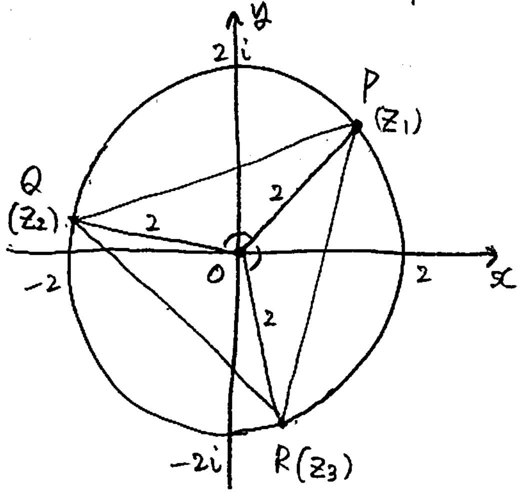
$= \boxed{z_1\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$. となる

ゆえに

1つの解 $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ に対して、
他の2つの解は $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1$, $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1$

となる

$z_1 = \frac{\pi}{4}$のときの図



ここで

$P(z_1)$, $Q(z_2)$, $R(z_3)$, $O(0)$ とすると

$OP = OQ = OR = |z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ より

Oは△PQRの外接円の中心であり OP, OQ, ORは

その半径である

また　$\angle POQ = \arg \frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{3}\pi$

$\angle ROP = \arg \frac{z_1}{z_3} = \frac{2}{3}\pi$ より

$\angle QOR$ も $\frac{2}{3}\pi$ となる

よって円周角の定理より $\angle RPQ = \angle PQR = \angle QRP = \frac{\pi}{3}$

となって△PQRは正三角形となる.