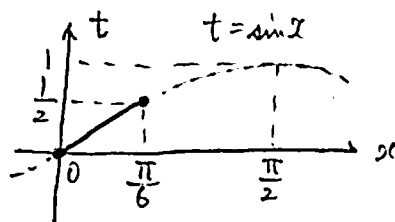


$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \cos^2 x + 2a \sin x + 4a^2 \\
 &= 1 - \sin^2 x + 2a \sin x + 4a^2 \\
 &= -(\sin x - a)^2 + 5a^2 + 1 \quad \text{である}
 \end{aligned}$$

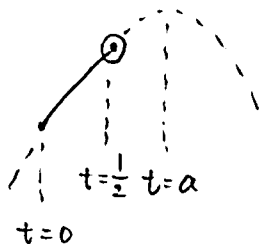


そこで $t = \sin x$ とおくと $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ である。また、

$$f(x) = -(t-a)^2 + 5a^2 + 1 \quad \text{とあり、これを } g(t) \text{ とおくと}$$

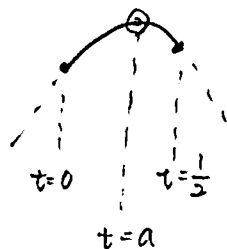
$$g(t) = -(t-a)^2 + 5a^2 + 1 \quad (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \quad \text{の最大値を求めねばよい}$$

(i) $\frac{1}{2} < a$ のとき



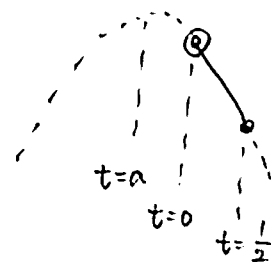
$$\begin{aligned}
 g(\frac{1}{2}) &= -(\frac{1}{2}-a)^2 + 5a^2 + 1 \\
 &= 4a^2 + a + \frac{3}{4} \quad \text{が最大値}
 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき



$$\begin{aligned}
 g(a) &= 5a^2 + 1 \quad \text{が} \\
 &\quad \text{最大値}
 \end{aligned}$$

(iii) $a < 0$ のとき

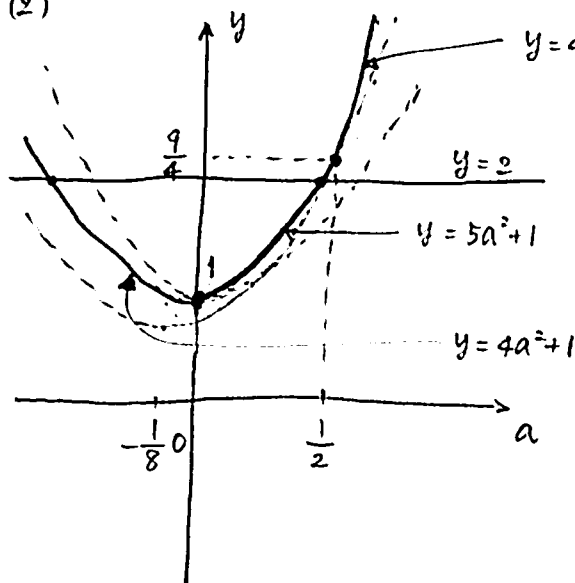


$$g(0) = 4a^2 + 1 \quad \text{が最大値となる}$$

以上のことから 求める最大値を $M(a)$ とすると

$$M(a) = \begin{cases} 4a^2 + a + \frac{3}{4} & (a > \frac{1}{2}) \\ 5a^2 + 1 & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \\ 4a^2 + 1 & (a < 0) \end{cases} \quad \text{となる}$$

(2)



(1) の $y = M(a)$ のグラフは左図のようになる

$$\begin{aligned}
 \text{よって } & \begin{cases} 4a^2 + 1 = 2 & (a < 0) \quad \text{--- ①} \\ 5a^2 + 1 = 2 & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \quad \text{--- ②} \end{cases}
 \end{aligned}$$

をとりはよい。($4a^2 + a + \frac{3}{4} = 2$ は解なし)

$$\text{①より } a^2 = \frac{1}{4} \quad \text{だから } a < 0 \text{ より } a = -\frac{1}{2}$$

このとき (1) の (iii) より $t = \sin x = 0$ となるから

$$\boxed{\tan x = 0}$$

$$\text{②より } a^2 = \frac{1}{5} \quad \text{だから } a > 0 \text{ より } a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

このとき (1) の (ii) より $t = \sin x = a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ となるから

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \boxed{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{5}}} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{となる}$$

ゆえに $\boxed{\text{求める } \tan x \text{ の値は } 0 \text{ と } \frac{1}{2}}$ となる