

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad a_{40} \quad a_{41}$$

$$1 \left| \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right| \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{9} \left| \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{27} \right| \frac{1}{81}, \dots, \frac{1}{81} \left| \dots \right|$$

1群 2群 3群 4群 5群

この数列を $\{a_n\}$ とおき、上のように群に分けると

第 k 群 には $\frac{1}{3^{k-1}}$ が 3^{k-1} 個 並ぶので 第 k 群の総和は 1 である

また 第 k 群 までの個数は $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{k-1}$

$$= \frac{3^0(3^k - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^k - 1) \text{ (個)} \quad \text{であるから}$$

第 670 項目が k 群 にあるとすると

$$\frac{1}{2}(3^{k-1} - 1) < 670 \leq \frac{1}{2}(3^k - 1) \text{ がなりたつので}$$

$$3^{k-1} - 1 < 1340 \leq 3^k - 1$$

よって $3^{k-1} < 1341 \leq 3^k$ がなりたつ — ①

ここで $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$ であるので

①をみたす k は $k = 7$ となるから 670 項目は 第 7 群 にある

ゆえに 第 670 項目の数は $\frac{1}{3^{7-1}} = \frac{1}{3^6} = \boxed{\frac{1}{729}} \text{ (7)(8)(9)} \text{ となる}$

次に 第 2182 項目が 第 l 群 にあるとすると

$$\frac{1}{2}(3^{l-1} - 1) < 2182 \leq \frac{1}{2}(3^l - 1) \text{ がなりたつので}$$

$$3^{l-1} < 4365 \leq 3^l \text{ となる — ②}$$

ここで $3^7 = 2187$, $3^8 = 6561$ であるので

②をみたす l は $l = 8$ となるから 第 2182 項目は 第 8 群 にある

また、7 群 までの項数は $\frac{1}{2}(3^7 - 1) = \frac{1}{2} \times 2186 = 1093 \text{ (項)} \text{ となるから}$

$$2182 - 1093 = 1089 \text{ より 2182 項目は 第 8 群 の 1089 項目 となる}$$

7 群 までの総和は $1 \times 7 = 7$ であり、その後は $\frac{1}{3^7}$ が 1089 個並ぶので

初項から 第 2182 項 までの和は

$$\begin{aligned} 7 + \frac{1}{3^7} \times 1089 &= 7 + \frac{3^2 \times 121}{3^7} = 7 + \frac{121}{3^5} = 7 + \frac{121}{243} \\ &= \frac{1701 + 121}{243} \\ &= \boxed{\frac{1822}{243}} \text{ (10)~(13)} \\ &\quad \text{(14)~(16)} \end{aligned}$$

となる