

$$(1) \quad 1 \text{ が } 1 \text{ 回だけ出る確率は } {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$1 \text{ が } 3 \text{ 回とも出る確率は } \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

$$\text{よって } 1 \text{ の目が奇数回出る確率は } \frac{75+1}{216} = \frac{76}{216} = \frac{19}{54}$$

$$(2) \quad \frac{{}_8C_2 \times {}_6C_4}{{}_{14}C_6} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}} = \frac{4 \cdot 7 \times 3 \cdot 5}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{20}{143}$$

$$(3) \quad P_n = \frac{{}_{n-7}C_3 \times {}_7C_2}{{}_n C_5} = \frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{6} \times \frac{7 \cdot 6}{2} \times \frac{5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$$

$$= \frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \times \frac{7 \times 5!}{2} \quad \text{であるから}$$

$$P_{n+1} > P_n \quad \text{をとくと}$$

$$\frac{(n-6)(n-7)(n-8)}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)} \times \frac{7 \cdot 5!}{2} > \frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \times \frac{7 \cdot 5!}{2} \quad \text{より}$$

$$\frac{n-6}{n+1} > \frac{n-9}{n-4}$$

$$n \geq 10 \text{ より } n+1, n-4 \text{ はともに正だから}$$

$$(n-4)(n-6) > (n-9)(n+1) \quad \text{より}$$

$$-10n + 24 > -8n - 9$$

$$2n < 33$$

$$n < 16.5$$

$$\text{同様にして } P_{n+1} < P_n \text{ をとくと } n > 16.5$$

$$P_{n+1} = P_n \text{ をとくと } n = 16.5 \quad \text{となる。}$$

$$\text{以上のことから } n = 10, 11, 12, \dots, 16 \text{ のとき } P_n < P_{n+1}$$

$$n = 17, 18, \dots \quad \text{のとき } P_n > P_{n+1} \quad \text{となるので}$$

$$P_{10} < P_{11} < P_{12} < P_{13} < P_{14} < P_{15} < P_{16} < P_{17} > P_{18} > P_{19} > \dots$$

$$\text{となる。ゆえに } P_n \text{ が最大となる } n \text{ の値は } \boxed{n=17} \text{ である}$$