

$$(1) \quad t^2 + pt + q = 0 \text{ の解は } t = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ であり}$$

これが虚数解をもつので $p^2 - 4q < 0$ — ① となる

このとき、 $t^2 + pt + q = 0$ の解 α は

$$\alpha = \frac{-p + \sqrt{4q - p^2} i}{2} \text{ または } \alpha = \frac{-p - \sqrt{4q - p^2} i}{2} \text{ である}$$

$$\text{また } \alpha^2 + p\alpha + q = 0 \text{ が成り立つので } \alpha^2 = -p\alpha - q \text{ である}$$

$$\text{よって } \alpha(2 - \alpha) = -\alpha^2 + 2\alpha$$

$$= p\alpha + q + 2\alpha$$

$$= (p+2)\alpha + q$$

$$= (p+2) \cdot \frac{-p \pm \sqrt{4q - p^2} i}{2} + q$$

$$= \left\{ (p+2) \times \left(-\frac{p}{2}\right) + q \right\} \pm \frac{1}{2}(p+2)\sqrt{4q - p^2} i \quad \text{となる}$$

これが実数より $\frac{1}{2}(p+2)\sqrt{4q - p^2} = 0$ となるが

$$\text{①より } 4q - p^2 > 0 \text{ であるので } p+2=0 \text{ より } \boxed{p=-2} \text{ である}$$

$$\text{このとき } \alpha(2 - \alpha) = q \text{ より}$$

$$\alpha(2 - \alpha) < 2 \text{ のとき } \underline{q < 2} \text{ である — ②}$$

$$\text{また } p=-2 \text{ を ①に代入して } 4 - 4q < 0 \text{ より } \underline{q > 1} \text{ — ③}$$

$$\text{②③より } \boxed{1 < q < 2} \text{ となる}$$

以上のことから求める (p, q) の条件は $\boxed{p=-2, 1 < q < 2}$ である

(1) 別解 $t^2 + pt + q = 0$ の虚数解は $z, \bar{z}$ とおけて ($\bar{z}$ は z の共役複素数)

$$z^2 + pz + q = 0 \text{ かつ } (\bar{z})^2 + p\bar{z} + q = 0 \text{ が成り立つ.}$$

ここで 解の1つを α (虚数解) とするとき、 $\alpha(2 - \alpha)$ が実数より

$$\alpha(2 - \alpha) = \overline{\alpha(2 - \alpha)} \text{ が成り立つら、} \alpha = z, \bar{z} \text{ いずれの場合も}$$

$$z(2 - z) = \overline{z(2 - z)} \text{ が成り立つから}$$

$$-z^2 + 2z = -(\bar{z})^2 + 2\bar{z}$$

$$pz + q + 2z = p\bar{z} + q + 2\bar{z}$$

$$(p+2)z + q = (p+2)\bar{z} + q$$

$$\text{よって } (p+2)(z - \bar{z}) = 0 \text{ より}$$

$p+2=0$ または $z = \bar{z}$ であるが z は虚数より $z \neq \bar{z}$ だから

$$\boxed{p=-2} \text{ となる}$$

このとき $z^2 - 2z + q = 0$ または $(\bar{z})^2 - 2\bar{z} + q = 0$ かなりだから

$$z(2-z) = q \quad \text{または} \quad \bar{z}(2-\bar{z}) = q \quad \text{より}$$

$$\alpha(2-\alpha) = \boxed{q < 2} \quad \text{である}$$

また: $t^2 - 2t + q = 0$ が虚数解をもつので $(-1)^2 - q < 0$ より

$$q > 1 \quad \text{である}$$

よって 求める条件は $\boxed{p = -2, 1 < q < 2}$ である

$$(2) \quad \beta = \frac{-p - \sqrt{4q - p^2}i}{2} \quad \text{であり} \quad p = -2 \quad \text{より}$$

$$\beta = \frac{2 - \sqrt{4q - 4}i}{2} = 1 - \sqrt{q-1}i \quad \text{となる}$$

$$\text{よって} \quad \beta(1-\beta) = (1 - \sqrt{q-1}i) \{1 - (1 - \sqrt{q-1}i)\}$$

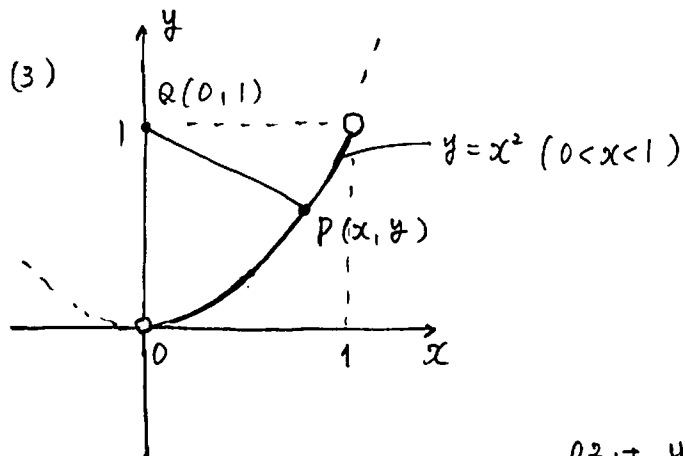
$$= (1 - \sqrt{q-1}i) \sqrt{q-1}i$$

$$= (q-1) + \sqrt{q-1}i \quad \text{となるので}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{q-1} \\ y = q-1 \end{cases} \quad \text{より} \quad \boxed{y = x^2} \quad \text{となる}$$

但し $1 < q < 2$ より $0 < \sqrt{q-1} < 1$ だから

$$\boxed{0 < x < 1} \quad \text{である}$$



$P(x, y)$ と $Q(0, 1)$ の距離を l とすると

$$l^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$= y + (y-1)^2$$

$$= y^2 - y + 1$$

$$= (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \quad \text{より}$$

l^2 は $y = \frac{1}{2}$ のとき 最小値 $\frac{3}{4}$ をとる

よって PQ の距離 l は $P(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ のとき 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる