

Pにおいて

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + 1 \times \sin\theta + \theta \cos\theta - \theta \cos\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 1 \times \cos\theta - \theta \times (-\sin\theta) = \theta \sin\theta \end{cases}$$

であるから P の法線は

ベクトル $(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta})$ に垂直で

点 P を通る。で

$$(\theta \cos\theta)x - (\cos\theta + \theta \sin\theta)y + (\theta \sin\theta)x - (\sin\theta - \theta \cos\theta)y = 0$$

より

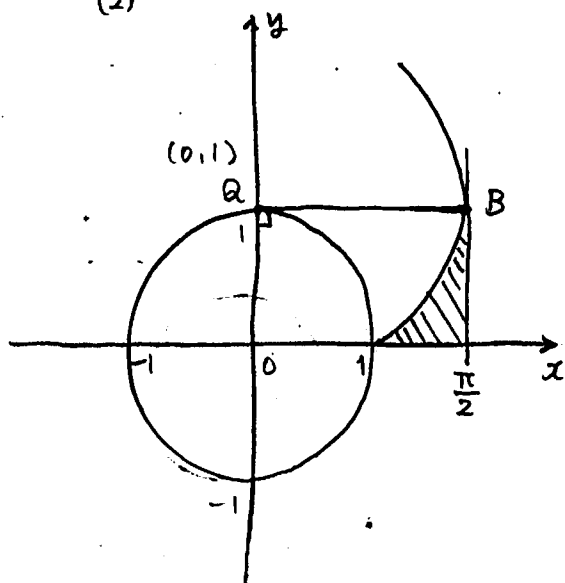
$$(\theta \cos\theta)x + (\theta \sin\theta)y - \theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$$

$$\theta < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1 \text{ となる。}$$

これは円上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ (この座標を Q とする) における接線となっている。

よって C の P における接線は $x^2 + y^2 = 1$ に接している。

(2)



B の座標は P において $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すればよいので

$$B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ となる}$$

よって求める面積を S とすると

$$S = \int_1^{\frac{\pi}{2}} y \, dx, \quad y = \sin\theta - \theta \cos\theta$$

$$dx = \theta \cos\theta \cdot d\theta$$

x	1	...	$\frac{\pi}{2}$
θ	0	...	$\frac{\pi}{2}$

であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \theta \cos\theta) \cdot \theta \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \theta \sin 2\theta - \theta^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta \, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos 2\theta \, d\theta \text{ である}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta \, d\theta, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \cos 2\theta \, d\theta \text{ とすると}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right)' d\theta = \left[-\frac{\theta}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} \times (-1) + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)' d\theta = \left[\frac{\theta^2}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 2\theta \, d\theta = -I = -\frac{\pi}{8} \text{ であるから}$$

$$S = I - \frac{1}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (-I) = 2I - \frac{1}{6} \times \frac{\pi^3}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}} \text{ となる}$$