

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z = 2+i \text{ より } z_1 &= (1+\sqrt{3}i)\bar{z} \\
 &= (1+\sqrt{3}i)(2-i) \\
 &= \boxed{(2+\sqrt{3}) + (-1+2\sqrt{3})i}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad (1+\sqrt{3}i)\bar{z} = kz \quad \text{に } z=1+ti, \bar{z}=1-ti \text{ を代入して}$$

$$(1+\sqrt{3}i)(1-ti) = k(1+ti)$$

$$(1+\sqrt{3}t) + (-t+\sqrt{3})i = k + kt i \quad \text{であり}$$

$1+\sqrt{3}t, -t+\sqrt{3}, k, kt$ はすべて実数より

$$\begin{cases} 1+\sqrt{3}t = k & \text{--- ①} \\ -t+\sqrt{3} = kt & \text{--- ②} \end{cases} \quad \text{がなりたつ。}$$

$$\text{①を②に代入して } -t+\sqrt{3} = (1+\sqrt{3}t)t \quad \text{より}$$

$$\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} = 0$$

$$(\sqrt{3}t-1)(t+\sqrt{3}) = 0$$

$$\text{よって } t = \frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3} \quad \text{であり}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき } k = 1+\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$$

$$t = -\sqrt{3} \text{ のとき } k = 1-3 = -2 \quad \text{となる}$$

$$\text{ゆえに } \boxed{(k, t) = \left(2, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), (-2, -\sqrt{3})} \quad \text{となる}$$

$$(3) \quad w_2 = (1+\sqrt{3}i)\bar{w}_1 \quad \text{より}$$

$$\bar{w}_2 = \overline{(1+\sqrt{3}i) \cdot \bar{w}_1} = (1-\sqrt{3}i) \cdot w_1 \quad \text{であるから}$$

$$\boxed{w_3} = (1+\sqrt{3}i)\bar{w}_2$$

$$= (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)w_1$$

$$\boxed{= 4w_1} \quad \text{となる}$$

$$(4) \quad z_{n+1} = (1+\sqrt{3}i)\bar{z}_n \quad \text{より}$$

$$\bar{z}_{n+1} = \overline{(1+\sqrt{3}i) \cdot \bar{z}_n} = (1-\sqrt{3}i) \cdot z_n \quad \text{であるので}$$

$$z_{n+2} = (1+\sqrt{3}i)\bar{z}_{n+1}$$

$$= (1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)z_n = 4z_n \quad \text{がなりたつ。}$$

よって $\{z_{2m-1}\}$ は 初項 $z_{2 \times 1 - 1} = z_1$ 、公比 4 の等比数列となっているので

$$\boxed{z_{2m-1}} = 4^{m-1} \cdot z_1$$

$$= \boxed{4^{m-1} \cdot \{(2+\sqrt{3}) + (-1+2\sqrt{3})i\}} \quad \text{となる}$$