少なくとも2つの内角が90°であるのは、

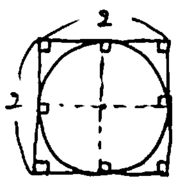
内角の和が360°であることから

(i) 4つの内角とも90°

(ii) 2つの内角が90°であるとき、　の場合のみとなる

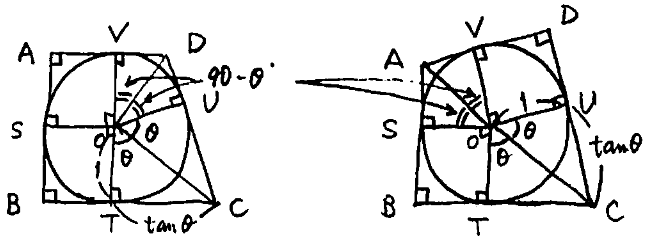
場合のみとなる。四角形の面積をSとすると

(i) 4つの内角とも90°のとき



$S=2\times2=4$ である

(ii) 2つの内角が90°のとき、となりあう2角が90°か対角が90°のいずれかとなるので



左図のように四角形ABCDをきめると

$\angle A=\angle B=90°$ か

$\angle B=\angle D=90°$ の

いずれかとしても一般性は失われない。

円の中心をO、円とAB, BC, CD, DAとの接点をそれぞれS, T, U, Vとする。

$\angle TOC=\theta$ とすると、$\triangle OTC\equiv\triangle OUC$ より $\angle UOC=\theta$ となり、$0°<\theta<90°$ をみたす。

左図では $\angle VOD=\angle UOD=90°-\theta$、右図では $\angle SOA=\angle VOA=90°-\theta$ となる

$\angle OTC=\angle OUC=90°$ より $TC=UC=\tan\theta$

また左図では $UD=VD=\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

右図では $SA=VA=\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ となる

よって求める面積Sは $S=1\times1+1\times1+\left(\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta\right)\times2+\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{\tan\theta}\right)\times2$

$=2+\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ であり

$0°<\theta<90°$ より $\tan\theta$ も $\dfrac{1}{\tan\theta}$ も正だから、相加相乗平均の関係から

$$S=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号は $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ より $\tan\theta=1$ より $\theta=45°$ となって

(i)の4つの内角がすべて90°となるときになる

以上のことから求める最小の面積は $\boxed{4}$ (正方形のとき) となる。