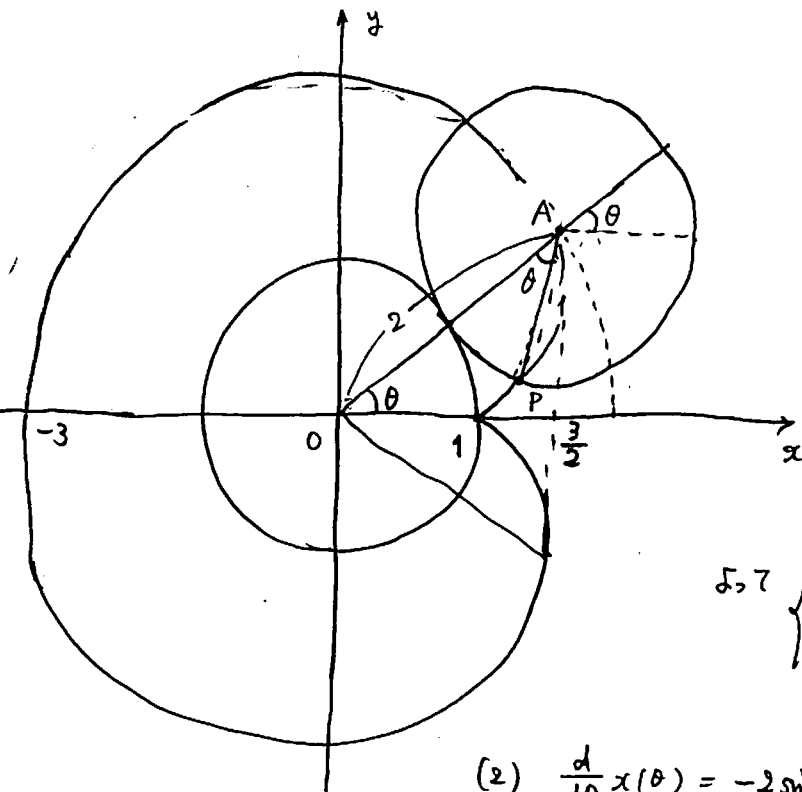




$$(1) \quad \vec{OA} = 2(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= (\cos(2\theta + \pi), \sin(2\theta + \pi)) \\ &= -(\cos 2\theta, \sin 2\theta) \quad \text{「あ、あ、あ」} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= 2(\cos \theta, \sin \theta) - (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \\ &= (2\cos \theta - \cos 2\theta, 2\sin \theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

「あ、あ、あ」

$$\text{よって} \quad \begin{cases} x(\theta) = 2\cos \theta - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\sin \theta - \sin 2\theta \end{cases} \quad \text{「あ、あ、あ」}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d}{d\theta} x(\theta) &= -2\sin \theta + 2\sin 2\theta \\ &= -2\sin \theta + 4\sin \theta \cos \theta \\ &= -2\sin \theta (1 - 2\cos \theta) \end{aligned}$$

よって $x(\theta)$ の増減表は以下のようになる

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$\frac{d}{d\theta} x(\theta)$		+	0	-	0	+	0	-	
$x(\theta)$	1	↗	$\frac{3}{2}$ 最大	↘	-3 最小	↗	$\frac{3}{2}$ 最大	↘	1

$$x(0) = f(2\pi) = 2 - 1 = 1$$

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$x(\pi) = -2 - 1 = -3$$

$$x\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y(\pi + \theta) &= 2\sin(\pi + \theta) - \sin(2\theta + 2\pi) \\ &= -2\sin \theta - \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$y(\pi - \theta) = 2\sin(\pi - \theta) - \sin(2\pi - 2\theta)$$

$$= 2\sin \theta + \sin 2\theta \quad \text{「あ、あ、あ」} \quad y(\pi + \theta) = -y(\pi - \theta) \text{ が成り立つ}$$

$$\text{また} \quad x(\pi + \theta) = 2\cos(\theta + \pi) - 2\cos(2\theta + 2\pi) = -2\cos \theta - 2\cos 2\theta$$

$$x(\pi - \theta) = 2\cos(\pi - \theta) - 2\cos(2\pi - 2\theta) = -2\cos \theta - 2\cos 2\theta$$

$$\text{よって} \quad x(\pi + \theta) = x(\pi - \theta) \text{ が成り立つ}$$

$(x(\theta), y(\theta))$ は x 軸に関して対称である, また $\theta = \pi$ に関して対称である

よって、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ のときの $y(\theta)$ を $y_1(\theta)$ 、 $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ のときの $y(\theta)$ を $y_2(\theta)$ とすると

求める面積 S は、

$$S = 2 \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} y_1(\theta) dx - 2 \int_1^{\frac{3}{2}} y_1(\theta) dx \quad \text{であり}$$

θ	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	π
x	1	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$	-3

$$dx = (-2\sin\theta + 2\sin 2\theta) d\theta \quad \text{だから}$$

$$S = 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(-2\sin\theta + 2\sin 2\theta) d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(-2\sin\theta + 2\sin 2\theta) d\theta$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2\sin\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta + \sin 2\theta) d\theta + 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (2\sin\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta + \sin 2\theta) d\theta$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (2\sin\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta + \sin 2\theta) d\theta$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (-2\sin^2\theta - \sin^2 2\theta + 3\sin 2\theta \sin\theta) d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi} (2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta - 6\sin^2\theta \cos\theta) d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi} \left(2 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1 - \cos 4\theta}{2} - 6\sin^2\theta \cos\theta \right) d\theta$$

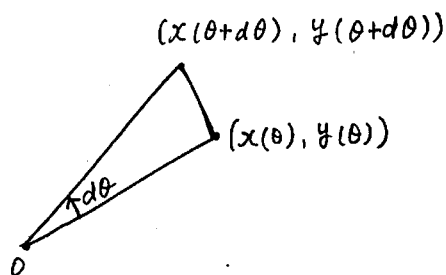
$$= 4 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta - 6\sin^2\theta \cos\theta \right) d\theta$$

$$= 4 \left[\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta - 2\sin^3\theta \right]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{6\pi} \quad \text{と なる}$$

(3) 811 解

左のような 微小な三角形の面積を dS とすると



$$dS = \frac{1}{2} \left| x(\theta) y(\theta+d\theta) - y(\theta) x(\theta+d\theta) \right| \quad \text{ただし}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} \left| \frac{x(\theta) y(\theta+d\theta) - x(\theta) y(\theta)}{d\theta} - \frac{y(\theta) x(\theta+d\theta) - x(\theta) y(\theta)}{d\theta} \right| \quad \text{①}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} \left| x(\theta) \cdot \frac{dy}{d\theta} - y(\theta) \cdot \frac{dx}{d\theta} \right| \quad \text{②}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| (2\cos\theta - \cos 2\theta)(2\sin\theta - \sin 2\theta) - (2\sin\theta - \sin 2\theta)(-2\sin\theta + 2\sin 2\theta) \right| d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| (2\cos\theta - \cos 2\theta)(\cos\theta - \cos 2\theta) + (2\sin\theta - \sin 2\theta)(\sin\theta - \sin 2\theta) \right| d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) - (\cos 2\theta \cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta) - 2(\cos 2\theta \cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta) \right| d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} |3 - 3\cos\theta| d\theta$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta) d\theta$$

$$= 3 \left[\theta - \sin\theta \right]_0^{2\pi} = \boxed{6\pi} \quad \text{③}$$