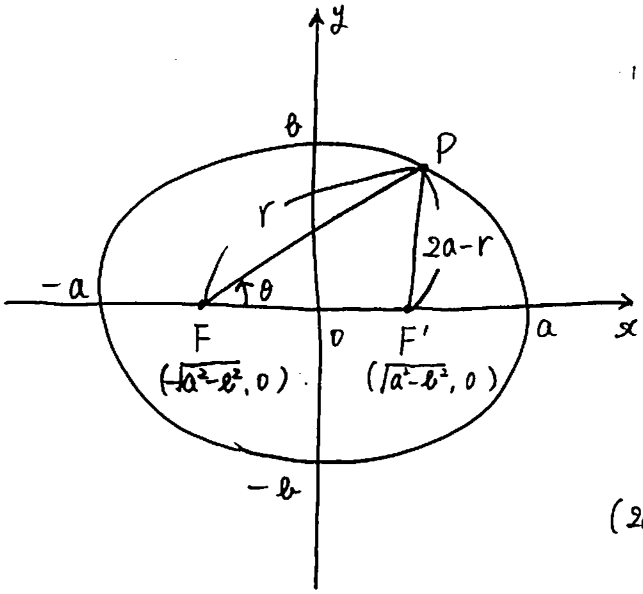


(1) もうひとつの焦点を F'とすると

$F(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $F'(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

とできる

だ円上の点をPとすると

(i) Pがx上にないとき

△FF'Pで余弦定理より

$(2a-r)^2 = r^2+\{2(\sqrt{a^2-b^2})\}^2 - 2r\cdot 2\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$ がなりたつから

$$4a^2-4ar = 4(a^2-b^2)-4r\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta \text{ より}$$

$$\{\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta - a\}r = -b^2 \text{ である}$$

ここで $a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$

$> a-\sqrt{a^2-a^2}\cos\theta$ ($a>b>0$ より)

$= a>0$ であるので $\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta - a < 0$ である

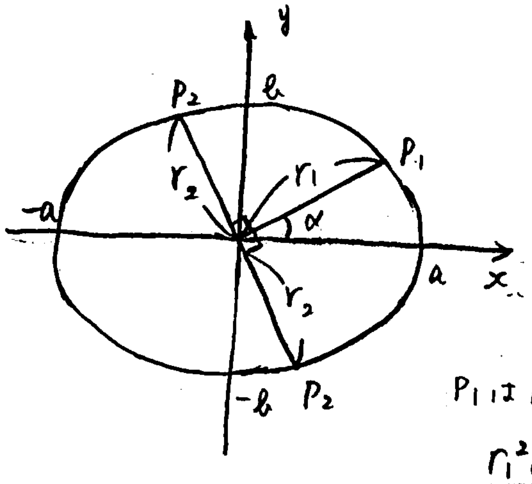
よって $r = \dfrac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}$ がなりたつ ―①

①で $\theta=0$ とすると $r = \dfrac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{b^2(a+\sqrt{a^2-b^2})}{a^2-(a^2-b^2)} = a+\sqrt{a^2-b^2}$

$\theta=\pi$ とすると $r = \dfrac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}} = \dfrac{b^2(a-\sqrt{a^2-b^2})}{a^2-(a^2-b^2)} = a-\sqrt{a^2-b^2}$

となって、Pがx軸上にあるときも①はなりたつ。

ゆえに $\boxed{r = \dfrac{b^2}{a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}}$ となる



(2) $P_1(r_1\cos\alpha, r_1\sin\alpha)$ とすると

P_2は $\left(r_2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right), r_2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ —①

または $\left(r_2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right), r_2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ —②

とおける

P_1はだ円上にあるので

$$\frac{r_1^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{r_1^2\sin^2\alpha}{b^2}=1$$ をみたし、

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}=\frac{1}{r_1^2}$$ —③ がなりたつ。

また P_2もだ円上にあるので

①のとき $\frac{r_2^2(-\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\alpha}{b^2}=1$ より $\frac{1}{r_2}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}$ —④

②のとき $\frac{r_2^2\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{r_2^2(-\cos\alpha)^2}{b^2}=1$ より $\frac{1}{r_2}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}$ —⑤

をそれぞれみたす。

③④⑤より いずれの場合も

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$ (一定) となり

$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}$ の値は定数となる