

$$(1) \quad P_n = \frac{{}_6C_1 \times {}_n C_2}{{}_{n+6}C_3} = \frac{6 \times \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$= \boxed{\frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}}$$

$$(2) \quad P_n > P_{n+1} \quad \text{を} \quad < \quad \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)} > \frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)} \quad \text{より}$$

$$\frac{n-1}{n+4} > \frac{n+1}{n+7} \quad \text{であり}$$

両辺に $(n+4)(n+7) (>0)$ をかけると

$$(n+7)(n-1) > (n+1)(n+4) \quad \text{より}$$

$$6n-7 > 5n+4$$

$$\text{よって} \quad n > 11$$

ゆえに $P_n > P_{n+1}$ をみたす最小の n は $\boxed{n=12}$ となる

(3) (2) と同様になると $P_n = P_{n+1}$ となるのは $n=11$

$P_n < P_{n+1}$ となるのは $n < 11$ であるから

$$P_2 < P_3 < \dots < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > \dots \quad \text{となるので}$$

P_n を最大にする n は $\boxed{n=11, 12}$ となる