

赤玉をちょうど n 回だけ ($n=0, 1, 2, \dots, 30$) とりだす確率を P_n とすると

$$P_n = {}^{30}C_n \left(\frac{3}{10}\right)^n \left(\frac{7}{10}\right)^{30-n}$$
$$= \frac{30!}{n!(30-n)!} \times \frac{3^n \cdot 7^{30-n}}{10^{30}} \quad \text{となる}$$

ここで $P_n < P_{n+1}$ ($n=0, 1, 2, \dots, 29$) をとくと

$$\frac{\cancel{30!}}{n!(30-n)!} \times \frac{3^n \cdot \cancel{7^{30-n}}}{\cancel{10^{30}}} < \frac{\cancel{30!}}{(n+1)!\{30-(n+1)\}!} \times \frac{3^{n+1} \cdot \cancel{7^{30-(n+1)}}}{\cancel{10^{30}}} \quad \text{より}$$
$$\frac{7}{30-n} < \frac{3}{n+1} \quad \text{となる}$$

$0 \leq n \leq 29$ より $(30-n)(n+1)$ は正なので、これを両辺にかかると

$$7(n+1) < 3(30-n) \quad \text{より}$$

$$10n < 83$$

$$\text{よって } n < 8.3 \quad \text{となる}$$

同様に $P_n > P_{n+1}$ をとくと 同じ式の変形をして $n > 8.3$ である

$$\text{ゆえに } \begin{cases} n=0, 1, 2, \dots, 8 \text{ のとき } P_n < P_{n+1} \\ n=9, 10, 11, \dots, 29 \text{ のとき } P_n > P_{n+1} \end{cases} \quad \text{となるので}$$

$$P_0 < P_1 < P_2 < \dots < P_7 < P_8 < P_9 > P_{10} > P_{11} > \dots > P_{29} > P_{30} \quad \text{がなりたつ}$$

よって P_9 が最大となるので

赤玉をちょうど 9 回とりだす確率が最も大きくなる