

$z$  の共役複素数を  $\bar{z}$  で表すと、一般に、複素数  $z_1, z_2$  に対し

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \text{ が成り立つ} \quad \text{④}$$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  に対し、 $f(x) = 0$  が複素数  $z$  を解にもつならば

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \text{ が成り立つ}$$

両辺共役複素数をとって  $\overline{z^3 + az^2 + bz + c} = \bar{0}$  が成り立つ

④ と実数  $r$  に対し  $\bar{r} = r$  であるから

$$\bar{z}^3 + a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0 \text{ が成り立つので}$$

$f(x) = 0$  は  $\bar{z}$  も解にもつ

以上のことから、 $f(x) = 0$  が虚数解をもつならば、その共役複素数も解である

よって虚数解の個数は偶数個となる

ここで  $f(x) = 0$  は3次方程式だから解は高々3個であり

虚数解を少なくとも1つもつということは

$f(x) = 0$  の解は  $r, \alpha, \bar{\alpha}$  ( $r$  は実数,  $\alpha, \bar{\alpha}$  は共役な虚数解) とおける

このとき  $r^3, \alpha^3, \bar{\alpha}^3$  も  $f(x) = 0$  の解となる

ここで  $r^3$  は実数解だから  $r$  と等しくなり、 $r^3 = r$  より

$$r(r+1)(r-1) = 0 \text{ から } \underline{r = 0, \pm 1} \text{ となる}$$

また虚数解  $\alpha$  は  $\alpha = r_1 (\cos \theta + i \sin \theta)$  ( $r_1 > 0, -\pi < \theta < 0, 0 < \theta < \pi$ ) とおける

ここで  $\alpha^3$  は  $\alpha^3 = r, \alpha^3 = \alpha, \alpha^3 = \bar{\alpha}$  のいずれかをみたす

(1)  $\alpha^3 = r$  のとき  $r = 0$  なら  $\alpha^3 = 0$  となって  $\alpha = 0$  より不適

よって  $r = \pm 1$  であり  $|\alpha|^3 = |r|$  より  $r_1^3 = 1$  だから  $r_1 > 0$  より  $r_1 = 1$

ゆえに  $\cos 3\theta + i \sin 3\theta = r$  であるので

$$\underline{r = 1 \text{ のとき } 3\theta = 2m_1\pi \text{ (} m_1 \text{ は整数) より } \theta = \frac{2m}{3}\pi}$$

$$\text{ゆえに } \underline{\theta = \pm \frac{2}{3}\pi} \text{ となる}$$

$$\underline{r = -1 \text{ のとき } 3\theta = \pi + 2m_2\pi \text{ (} m_2 \text{ は整数) より } \theta = \frac{1+2m_2}{3}\pi}$$

$$\text{ゆえに } \underline{\theta = \pm \frac{\pi}{3}} \text{ となる}$$

このとき  $\bar{\alpha}^3 = \bar{r}$  より  $\bar{\alpha}^3 = r$  もみたす

(ii)  $\alpha^3 = \alpha$  のとき  $|\alpha|^3 = |\alpha|$  より  $r_1^3 = r_1$  であり  $r_1 > 0$  より  $r_1 = 1$

よって  $\cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos \theta + i \sin \theta$  より

$3\theta = \theta + 2m_3\pi$  ( $m_3$  は整数)

ゆえに  $\theta = \frac{m_3}{2}\pi$ , 1 から  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  となる

このとき、実数解  $r$  は  $r = 0, \pm 1$  であり,  $\overline{\alpha^3} = \overline{\alpha}$  より  $\overline{\alpha^3} = \overline{\alpha}$  をみたす

(iii)  $\overline{\alpha^3} = \overline{\alpha}$  のとき  $|\overline{\alpha}|^3 = |\overline{\alpha}|$  より  $r_1^3 = r_1$  であり  $r_1 > 0$  より  $r_1 = 1$

よって  $\cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$  より

$-3\theta = -\theta + 2m_4\pi$  ( $m_4$  は整数)

ゆえに  $\theta = -m_4\pi$  ( $m_4$  は整数) であるが

$\alpha$  は虚数なので解なし

以上のことから、3つの解は  $(1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$ ,  $(-1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2})$

$(1, i, -i)$ ,  $(0, i, -i)$ ,  $(-1, i, -i)$  の5通りとなる

もとの方程式は

解が  $(1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$  のとき  $(x-1)(x^2+x+1)=0$  より  $x^3-1=0$

$(-1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2})$  のとき  $(x+1)(x^2-x+1)=0$  より  $x^3+1=0$

$(1, i, -i)$  のとき  $(x-1)(x^2+1)=0$  より  $x^3-x^2+x-1=0$

$(0, i, -i)$  のとき  $x(x^2+1)=0$  より  $x^3+x=0$

$(-1, i, -i)$  のとき  $(x+1)(x^2+1)=0$  より  $x^3+x^2+x+1=0$

となる