

$$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \mid \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \mid \frac{1}{5}, \dots, \frac{21}{21} \mid \frac{1}{22}, \frac{2}{22}, \frac{3}{22}, \frac{4}{22}, \frac{5}{22}, \frac{6}{22}, \frac{7}{22}, \dots$$

群	①	②	③	④	⑤	...	②①	②②
個数	1	2	3	4	5	...	21	
群の和	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	...	$\frac{22}{2}$	

21群までの個数は $1+2+\dots+21 = \frac{21 \times 22}{2} = 21 \times 11 = 231$.

よって $\frac{7}{22}$ が最初に現れるのは $231+7=238$ より 第 $\boxed{238}$ 項である

自然数 n に対して $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \frac{1}{n} (1+2+\dots+n)$
 $= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} (\overset{\neq}{n+1})$ であるから

第21群までの総和は $\frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{22}{2}$
 $= \frac{1}{2} (2+3+4+\dots+22)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{21 \times (2+22)}{2} = 21 \times 6 = 126$.

よって 第238項までの総和は $126 + (\frac{1}{22} + \frac{2}{22} + \dots + \frac{7}{22})$
 $= 126 + \frac{1}{22} \times \frac{7 \times 8^2}{2}$
 $= 126 + \frac{14}{11} = \frac{1386+14}{11} = \frac{1400}{11}$ である

また 第1000項が 第 k 群にあるとすると k 群までの個数は $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$
 だから

$$\frac{(k-1)k}{2} < 1000 \leq \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{より}$$

$$(k-1)k < 2000 \leq k(k+1) \quad \text{である} \quad \text{--- ①}$$

$k=45$ のとき $44 \times 45 = 1980$, $45 \times 46 = 2070$ であるから ① をみたら

よって 第1000項は 45群にあり, 44群までの個数は $1+2+\dots+44 = \frac{44 \times 45}{2} = 990$ より

第1000項は 45群の10番目 で $\frac{10}{45} = \frac{\boxed{2}}{9}$ となる

また $\frac{1}{2}$ と等しい数は 偶数番目の群に必ず1つずつ存在するので

44群までの 偶数番目の群の個数が 解となり $\boxed{22}$ 回となる