

(1) Pは直交座標で $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$= (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$$

$$= (3 \cos^2 \theta, 3 \cos \theta \sin \theta) \quad \text{--- ①}$$

$$= \left(3 \times \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, 3 \times \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

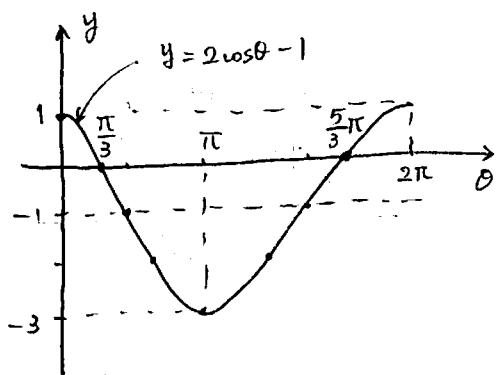
$$= \left(\frac{3}{2}, 0 \right) + \frac{3}{2} (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \quad \text{であるから}$$

Pは中心 $\left(\frac{3}{2}, 0 \right)$, 半径 $\frac{3}{2}$ の円周上を動く。

(2) PQ間の距離を d とすると

$$d = |f(\theta) - g(\theta)| = |3 \cos \theta - (1 + \cos \theta)|$$

$$= |2 \cos \theta - 1| \quad \text{であるから}$$



$\theta = \frac{\pi}{3}$ および $\frac{5}{3}\pi$ のとき 最小値 $\boxed{0}$ をとり

$\theta = \pi$ のとき 最大値 $\boxed{3}$ をとる

(3) 中点が原点のとき $\frac{3 \cos \theta + (1 + \cos \theta)}{2} = 0$ より

$$\cos \theta = -\frac{1}{4} \quad \text{のときとなる}$$

$$\text{このとき } \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{より ①から}$$

$$P \text{ の直交座標は } \left(3 \times \frac{1}{16}, 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \left(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \right)$$

$$= \left(\frac{3}{16}, \pm \frac{3\sqrt{15}}{16} \right) \quad \text{となる}$$