$f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ とおくと

$f(x) = x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ より

$$f'(x) = 1\times\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

また $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \quad (x>0 \text{ より})$$

よって $x>0$ で $f'(x)$ は単調減少であり

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \log 1 - 0 = 0$ だから

$x>0$ で $f'(x)>0$ がなりたつ．

よって $x>0$ で $f(x)$ は単調増加であるから

すべての正の数 x に対して

$f(x) < \lim_{t\to\infty} f(t)$ がなりたつので

$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log e$ がなりたち

底 e は1より大きいので

すべての正の数 x に対して $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$ がなりたつ ― ①

また $g(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ とおくと

$$g'(x) = 1\times\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{2x+1}{2}\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{2x(x+1)} \quad \text{であり}$$

$$g''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{2\times2x(x+1)-(2x+1)\times(4x+2)}{4x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} - \frac{(2x^2+2x)-(4x^2+4x+1)}{2x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x(x+1)+2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

よって　$x>0$ で $g'(x)$ は単調増加であり

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\} = \log 1 - 0 = 0 \text{ だから}$$

$x>0$ で $g'(x)<0$ がなりたつ.

よって　$x>0$ で $g(x)$ は単調減少であるから

すべての正の数 x に対して

$$g(x) > \lim_{t\to\infty} g(t) \text{ がなりたつので}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} > \lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}} \text{ がなりたつ.}$$

ここで $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+\frac{1}{2}}$

$$= \lim_{t\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\}$$

$$= \log e + \frac{1}{2}\log 1 = \log e \text{ となるから}$$

すべての正の数 x に対して $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} > \log e$ がなりたち

底 e は 1 より大きいので

すべての正の数 x に対して $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} > e$ はなりたつ ― ②

①②より
$$\boxed{\text{すべての正の数 } x \text{ に対して } \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \text{ はなりたつ.}}$$