(1) $x=\tan t$, $y=\dfrac{1}{\cos t}$ を $2x-\sqrt{3}y=0$ に代入して

$$2\tan t-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cos t}=0 \text{ より}$$

$$\frac{2\sin t-\sqrt{3}}{\cos t}=0$$

よって $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $t=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}\text{ だから}\right)$

このとき $x=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$y=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$ となる

よって $\boxed{l \text{ と } C \text{ の 交点は } (\sqrt{3},\ 2)}$ である

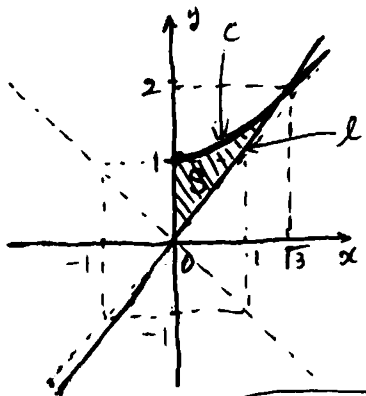
(2) 一般に $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ がなりたつから

C上の点は $1+x^2=y^2$ がなりたち $x^2-y^2=-1$ となって双曲線となる

但し $0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ より $x=\tan t\geqq 0$

$y=\dfrac{1}{\cos t}>0$ をみたす

よって C は $x^2-y^2=-1$ $(x\geqq 0,\ y>0)$ となる



ゆえに求める面積は左図の斜線部となる.

この面積を S とすると

$$S=\int_0^{\sqrt{3}} y\cdot dx-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2 \text{ より}$$

$$\underline{S=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx-\sqrt{3}} \text{ となる}$$

ここで $\boxed{I=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx}$ とおくと

$\boxed{x=\tan t,\ y=\dfrac{1}{\cos t}}$ で置換すると $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \cdots & \sqrt{3} \\ \hline t & 0 & \cdots & \frac{\pi}{3}\end{array}$, $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ より

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\times\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^4 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}dt$$

ここでまた, $u=\sin t$ とすると $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \cdots & \frac{\pi}{3} \\ \hline u & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}$. $du=\cos t\,dt$ より

$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{(1-u^2)^2}du=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{(1-u)(1+u)}\right\}^2du$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)\right\}^2du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\left(\frac{1}{1-u}\right)^2+\left(\frac{1}{1+u}\right)^2+\frac{2}{(1-u)(1+u)}\right\}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right\}du$$

よって $I = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} - \log|1-u| + \log|1+u|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(1+u)-(1-u)}{1-u^2} + \log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2u}{1-u^2} + \log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}} + \log\left|\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|\right\}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

以上のことから、求める面積 S は $S = I - \sqrt{3} = \boxed{\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})}$ となる

$\boxed{I = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx \text{ について.}}$

(別解①) $x^2 - y^2 = -1$ は $(x+y)(x-y) = -1$ とできるから

$x + y = t$ とおくと

$x - y = -\frac{1}{t}$ がなりたつ.

これらを辺々たして 2でわると $x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$

辺々ひいて 2でわると $y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ がなりたつ.

よって $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) & \text{とおくと} \\ y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$ $dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2t}\left(t + \frac{1}{t}\right)dt$

また $2x = t - \frac{1}{t}$ より

$t^2 - 2xt - 1 = 0$

よって $t = x \pm \sqrt{1+x^2}$ をみたす.

但し, $x \geqq 0$, $y > 0$ より $t = x + y > 0$ だから

$t = x + \sqrt{1+x^2}$ となるので

x	$0 \cdots \sqrt{3}$
t	$1 \cdots 2+\sqrt{3}$

$$I = \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2t}\left(t + \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{t}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{t}\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t}\right)dt$$

$$I = \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2} + 2\log|t|\right]_1^{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left\{(2+\sqrt{3})^2 - \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}\right\} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{8}\left\{(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2\right\} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

$$= \boxed{\sqrt{3} + \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})}$$ となる

（別解②）

$$\left(\frac{e^s-e^{-s}}{2}\right)^2=\frac{e^{2s}+e^{-2s}-2}{4}$$

$$\left(\frac{e^s+e^{-s}}{2}\right)^2=\frac{e^{2s}+e^{-2s}+2}{4}$$ であるから、これらを辺々ひくと -1 になるので

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{e^s-e^{-s}}{2} \\ y=\dfrac{e^s+e^{-s}}{2} \end{cases}}$$ とおくと $x^2-y^2=-1$ をみたす．

$$dx=\frac{e^s+e^{-s}}{2}ds$$ であり

また $2x=e^s-e^{-s}$ より

$$e^{2s}-2xe^s-1=0$$

よって $e^s=x\pm\sqrt{1+x^2}$ をみたす

但し、$e^s>0$ より $e^s=x-\sqrt{1+x^2}$ は不適

よって $e^s=x+\sqrt{1+x^2}$ となるので

x	$0\cdots\sqrt{3}$
s	$0\cdots\log(2+\sqrt{3})$

$x=0$ のとき $e^s=1$ より $s=0$

$x=\sqrt{3}$ のとき $e^s=2+\sqrt{3}$ より $s=\log(2+\sqrt{3})$

よって $$I=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}y\,dx=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}\left(\frac{e^s+e^{-s}}{2}\right)^2ds$$

$$=\int_0^{\log(2+\sqrt{3})}\frac{e^{2s}+e^{-2s}+4}{4}ds$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2s}-\frac{1}{2}e^{-2s}\right)+s\right]_0^{\log(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{2\log(2+\sqrt{3})}-e^{-2\log(2+\sqrt{3})}\right)+\log(2+\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{\log(2+\sqrt{3})^2}-e^{\log(2+\sqrt{3})^{-2}}\right)+\log(2+\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{8}\left\{(2+\sqrt{3})^2-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}\right\}+\log(2+\sqrt{3})$$

$$=\frac{1}{8}\left\{(2+\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2\right\}+\log(2+\sqrt{3})$$

$$=\boxed{\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})}$$ となる

〔別解③〕

$$I=\int_0^{\sqrt3}\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\sqrt3}(x)'\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^{\sqrt3}-\int_0^{\sqrt3}x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$=2\sqrt3-\int_0^{\sqrt3}\frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$=2\sqrt3-\int_0^{\sqrt3}\sqrt{1+x^2}\,dx+\int_0^{\sqrt3}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$=2\sqrt3-I+\int_0^{\sqrt3}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$ となる　―①

ここで $\left\{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ であるから

①は

$$I=2\sqrt3-I+\left[\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^{\sqrt3}$$

$$I=2\sqrt3-I+\log(2+\sqrt3)$$ となるから

$$2I=2\sqrt3+\log(2+\sqrt3)$$

よって $\boxed{I=\sqrt3+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt3)}$ となる

(別解④)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan t)'\times\frac{1}{\cos t}dt$$

$$=\left[\tan t\times\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan t)\left(-\frac{-\sin t}{\cos^2 t}\right)dt$$

$$=\sqrt{3}\times 2-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$

$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt$$

$$=2\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}dt.$$

$$=2\sqrt{3}-I+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt$$

よって $\quad 2I=2\sqrt{3}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt$

$$=2\sqrt{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos t}{1-\sin t}+\frac{\cos t}{1+\sin t}\right)dt$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\Big[-\log|1-\sin t|+\log|1+\sin t|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 2\log(2+\sqrt{3})$$

$$=2\sqrt{3}+\log(2+\sqrt{3}).$$

ゆえに $\quad I=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})\quad$ である.