

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15} \text{ より } (2\cos^2\alpha - 1) + (2\cos^2\beta - 1) = \frac{4}{15} \text{ だから}$$

$$2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta = \frac{34}{15}$$

$$\text{よって } \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \boxed{\frac{17}{15}} \text{ アイ
ウエ}$$

$$\text{また ② から } \cos^2\alpha \cos^2\beta = \boxed{\frac{4}{15}} \text{ である}$$

$$\text{よって } \cos^2\alpha, \cos^2\beta \text{ の和が } \frac{17}{15}, \text{ 積が } \frac{4}{15} \text{ だから}$$

$$\cos^2\alpha, \cos^2\beta \text{ は } t^2 - \frac{17}{15}t + \frac{4}{15} = 0 \text{ の解となるから}$$

$$15t^2 - 17t + 4 = 0 \text{ より}$$

$$(3t-1)(5t-4) = 0$$

$$\text{よって } t = \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{-1}{-4}$$

$$\text{ここで } |\cos\alpha| \geq |\cos\beta| \text{ の両辺 2乗して}$$

$$\cos^2\alpha \geq \cos^2\beta \text{ より } \cos^2\beta = \boxed{\frac{1}{9}} \text{ ケ, } \cos^2\alpha = \boxed{\frac{4}{5}} \text{ カ
ナニ$$

$$\text{また } \cos\alpha \cos\beta < 0 \text{ であるから}$$

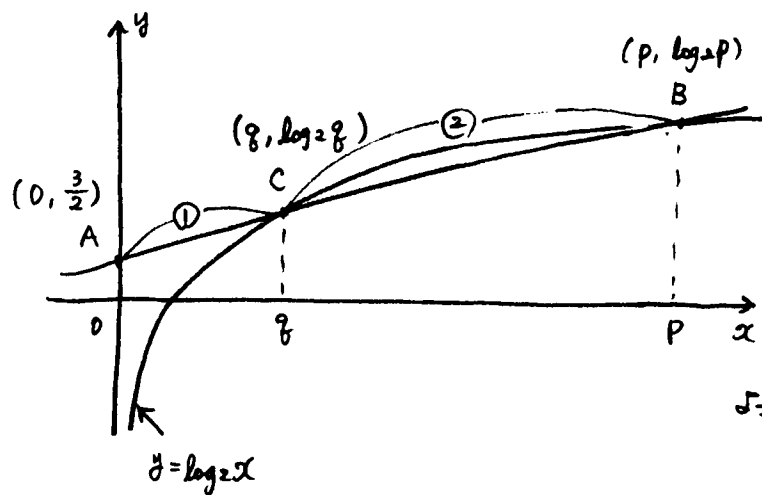
$$\cos\alpha \text{ と } \cos\beta \text{ は異符号であり, かつ } \alpha < \beta \text{ だから}$$

$$\beta \text{ は } \frac{\pi}{2} \text{ より大きく, } \alpha \text{ は } \frac{\pi}{2} \text{ より小さい}$$

$$\text{よって } \cos\beta = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{3}} \text{ シ, } \cos\alpha = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \text{ ス
ソ$$

解答記号	正 解	配点
$\frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$	$\frac{17}{15}$	3
オ	4	2
$\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\frac{4}{5}$	3
$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\frac{1}{3}$	3
$\frac{\text{コ}\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	2
$\frac{\text{ス}\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	2

15点



真数条件により $p > \boxed{0}$, $q > \boxed{0}$ である

AB を 2:1:1 に内分するから、C は

$$\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} p, \frac{2 \times \frac{3}{2} + 1 \times \log_2 p}{3} \right) \\ = \left(\frac{1}{3} p, \frac{1}{3} \log_2 p + \boxed{1} \right) \text{ である}$$

$$\begin{cases} q = \frac{1}{3} p & \text{--- ④} \\ \log_2 q = \frac{1}{3} \log_2 p + 1 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

$$\text{⑤より } 3 \log_2 q = \log_2 p + 3$$

$$\log_2 q^3 = \log_2 p + \log_2 8$$

$$\log_2 q^3 = \log_2 8p \quad \text{よって } 8p = q^3 \text{ より } p = \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} q^{\boxed{3}} \text{ --- ⑥}$$

$$\text{⑥を④に代入して } q = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} q^3 \text{ から}$$

$$q^3 - 24q = 0$$

$$q \neq 0 \text{ より } q^2 - 24 = 0 \quad \text{--- ⑦}$$

$$q > 0 \text{ より } q = \sqrt{24} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

$$\text{このとき } p = \frac{1}{8} (2\sqrt{6})^3 = \frac{1}{8} \times 8 \cdot 6\sqrt{6} = \boxed{6\sqrt{6}}$$

また C の y 座標を y とすると

$$y = \log_2 (2\sqrt{6}) = \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 6$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 3)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log_2 3$$

$$= 1.5 + \frac{1}{2} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$= 1.5 + \frac{1}{2} \times \frac{0.4771}{0.3010}$$

$$= 1.5 + \frac{1}{2} \times 1.58$$

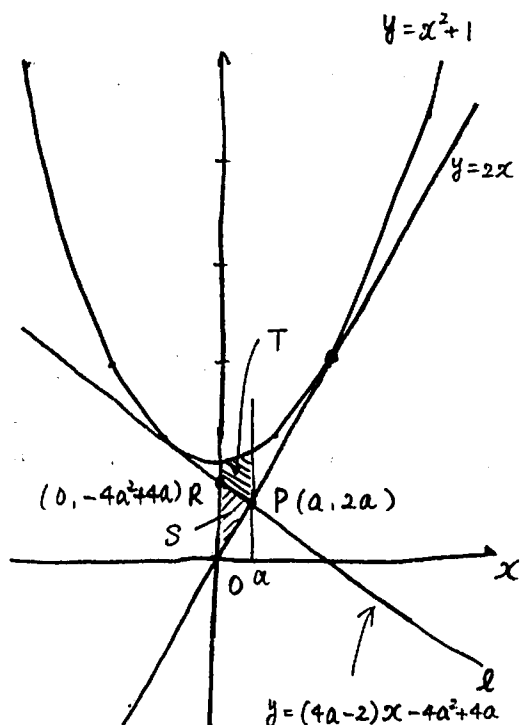
$$= 1.5 + 0.79$$

$$= \frac{2.29}{3}$$

$$\text{よって } \boxed{2.3} \text{ --- ⑧ とする}$$

$$\begin{array}{r} 1.58 \\ 0.3010 \overline{) 0.4771} \\ \underline{3010} \\ 17610 \\ \underline{15050} \\ 25600 \\ \underline{24080} \\ 1520 \end{array}$$

解答記号	正解	配点
タ	0	2
チ ツ	$\frac{1}{3}$	2
テ ト $\log_2 p + 1$	$\frac{1}{3} \log_2 p + 1$	2
ニ ヌ q^3	$\frac{1}{8} q^3$	3
ノ $\sqrt{18}$	$6\sqrt{6}$	2
ヒ $\sqrt{7}$	$2\sqrt{6}$	2
ヘ	6	2



(1) $y = x^2 + 1$ より $y' = 2x$ だから

C上の点 $(t, t^2 + 1)$ での接線は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1 \text{ より}$$

$$y = \underset{\text{P}}{2} t x - \underset{\text{I}}{t^2} + \underset{\text{I}}{1}$$

この直線が $P(a, 2a)$ を通るとすると

$$2a = 2ta - t^2 + 1 \text{ より}$$

$$t^2 - \underset{\text{I}}{2} a t + \underset{\text{I}}{2} a - \underset{\text{I}}{1} = 0 \text{ であるから}$$

$$\{t - (2a - 1)\} (t - 1) = 0 \text{ より } \left(1 \times \frac{-(2a-1)}{-1}\right)$$

$$t = \underset{\text{I}}{2} a - \underset{\text{I}}{1}, \underset{\text{I}}{1} \text{ となる}$$

よって $a \neq 1$ のとき、Pを通るCの接線は2本ある

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 2a - 1 \text{ のとき } y = 2(2a - 1)x - (2a - 1)^2 + 1 \text{ より} \\ y = \underset{\text{I}}{4} a - \underset{\text{I}}{2} x - \underset{\text{I}}{4} a^2 + \underset{\text{I}}{4} a \quad \text{--- ① : } l \\ t = 1 \text{ のとき } y = \underset{\text{I}}{2} x \text{ となる} \end{array} \right.$$

(2) l と y 軸との交点を $(0, r)$ とすると $r = -4a^2 + 4a$ であり

$$r > 0 \text{ とすると } -4a^2 + 4a > 0 \text{ より}$$

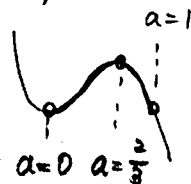
$$a(a - 1) < 0$$

$$\text{よって } \underset{\text{I}}{0} < a < \underset{\text{I}}{1} \text{ のときとなる}$$

このとき $\triangle OPR$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times (-4a^2 + 4a) \times a = -2a^3 + 2a^2 = \underset{\text{I}}{2} (a^{\underset{\text{I}}{2}} - a^{\underset{\text{I}}{3}}) \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} S' &= 2(2a - 3a^2) \\ &= 2 \left\{ -3a \left(a - \frac{2}{3} \right) \right\} \\ &= -6a \left(a - \frac{2}{3} \right) \text{ より} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S \text{ は } a = \underset{\text{I}}{\frac{2}{3}} \text{ で 最大値をとり、その値は } S &= 2a^2(1 - a) \\ &= 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \underset{\text{I}}{\frac{8}{27}} \text{ となる} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } T &= \int_0^a ((x^2+1) - \{(4a-2)x - 4a^2 + 4a\}) dx \\
 &= \int_0^a (x^2 - 2(2a-1)x + (4a^2 - 4a + 1)) dx \\
 &= \int_0^a \{x - (2a-1)\}^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} \{x - (2a-1)\}^3 \right]_0^a \\
 &= \frac{1}{3} \{a - (2a-1)\}^3 - \frac{1}{3} \{- (2a-1)\}^3 \\
 &= \frac{1}{3} \{a^3 - 3a^2(2a-1) + 3a(2a-1)^2 - (2a-1)^3\} \\
 &= \frac{1}{3} \{a^3 - 6a^3 + 3a^2 + 3a(4a^2 - 4a + 1)\} \\
 &= \frac{1}{3} (7a^3 - 9a^2 + 3a) \\
 &= \boxed{\frac{7}{3}} a^3 - \boxed{3} a^2 + \boxed{a}
 \end{aligned}$$

$$\therefore T' = 7a^2 - 6a + 1 \text{ であり } T' = 0 \text{ とすると } a = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}$$

$\sqrt{2} \approx 1.4$ より

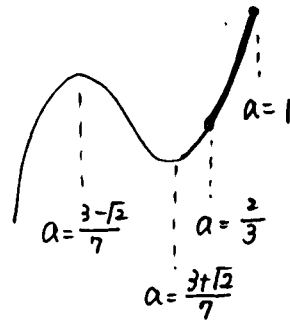
$$\frac{3-\sqrt{2}}{7} \approx \frac{3-1.4}{7} = \frac{1.6}{7} = \frac{4.8}{21}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{7} \approx \frac{3+1.4}{7} = \frac{4.4}{7} = \frac{13.2}{21}$$

$$\text{また } \frac{2}{3} = \frac{14}{21} \text{ であるから}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{7} < \frac{2}{3}$$

$\therefore \frac{2}{3} \leq a < 1$ では T は単調に増加する ②



解答記号	正解	配点
ア	2	2
イ	1	1
エ ² - ウ ² at + エ ² a - オ ²	$t^2 - 2at + 2a - 1$	2
カ ² a - キ ²	$2a - 1$	1
ク	1	1
ケ	1	1
(コ ² a - サ ²)x - シ ² a ² + ス ² a	$(4a-2)x - 4a^2 + 4a$	2
セ	2	2
ソ ² < a < タ ²	$0 < a < 1$	2

解答記号	正解	配点
チ ² (a ² - a ²)	$2(a^2 - a^3)$	3
ト ² / _ナ	$\frac{2}{3}$	3
ニ ² / _{ヌネ}	$\frac{8}{27}$	3
ノ ² a ³ - ヒ ² a ²	$\frac{7}{3}a^3 - 3a^2$	3
フ	a	1
ヘ	2	3

30点

$$(1) \quad S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4 \text{ より}$$

$$S_1 S_2 S_3 = 1 \times 2 \times 4 = \boxed{8}_P, \quad S_1 + S_2 + S_3 = 1 + 2 + 4 = \boxed{7}_1$$

$$(2) \quad S_n = x r^{n-1} \text{ であり}$$

$$S_1 S_2 S_3 = a^3 \text{ より } x \times x r \times x r^2 = a^3 \text{ である}$$

$$(x r)^3 = a^3$$

$$x, r, a \text{ は実数より } x r = \boxed{a} \text{ ③}$$

$$\text{また } S_1 + S_2 + S_3 = b \text{ より}$$

$$x + x r + x r^2 = b$$

$$x(1 + r + r^2) = b$$

$$\text{③より } x = \frac{a}{r} \text{ である } \frac{a}{r}(1 + r + r^2) = b$$

$$\text{よって } a + a r + a r^2 = b r \text{ より}$$

$$\boxed{a} r^2 + (\boxed{a} - \boxed{b}) r + \boxed{a} = 0 \quad \text{--- ④ とする}$$

$$r \text{ は実数より (判別式)} = (a - b)^2 - 4a^2 \geq 0 \text{ である}$$

$$-3a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\text{よって } \boxed{3}a^2 + \boxed{2}ab - b^2 \leq 0 \quad \text{--- ⑤ かわりたつ}$$

$$(3) \quad a = 64, b = 336 \text{ のとき ④は } 64r^2 + (64 - 336)r + 64 = 0 \text{ より}$$

$$8r^2 + (8 - 42)r + 8 = 0$$

$$8r^2 - 34r + 8 = 0$$

$$4r^2 - 17r + 4 = 0$$

$$(4r - 17)(r - 4) = 0$$

$$r > 1 \text{ より } r = \boxed{4}$$

$$\text{よって ③は } x \times 4 = 64 \text{ より } x = \boxed{16}_{サシ}$$

$$\text{以上のことから } S_n = 16 \cdot 4^{n-1} = 4^2 \cdot 4^{n-1} = 4^{n+1} \text{ より}$$

$$t_n = S_n \log_4 S_n \text{ とすると}$$

$$t_n = 4^{n+1} \log_4 4^{n+1} = (n + \boxed{1}) \cdot 4^{n+\boxed{1}}$$

$\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は $U_n - 4U_n$ を計算して

$$\begin{aligned}
 U_n &= 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + 4 \times 4^4 + \dots + (n+1) \cdot 4^{n+1} \\
 - \quad 4U_n &= \quad \quad \quad 2 \times 4^3 + 3 \times 4^4 + \dots + n \cdot 4^{n+1} + (n+1) \cdot 4^{n+2} \\
 \hline
 -3U_n &= 2 \cdot 4^2 + \underbrace{4^3 + 4^4 + \dots + 4^{n+1}}_{\text{初項 } 4^3, \text{ 公比 } 4, \text{ 項数 } n-1 \text{ の等比数列の和}} - (n+1) \cdot 4^{n+2} \\
 -3U_n &= 2 \times 16 + \frac{4^3(4^{n-1}-1)}{4-1} - (n+1) \cdot 4^{n+2} \\
 -3U_n &= 32 + \frac{1}{3}(4^{n+2}-64) - (n+1) \cdot 4^{n+2} \\
 -3U_n &= \frac{-3n-2}{3} \times 4^{n+2} + \frac{96-64}{3} \\
 \therefore U_n &= \frac{\overset{\text{ソ}}{\cancel{3}n+2}}{\underset{\text{チ}}{9}} \times 4^{\overset{\text{ツ}}{n+2}} - \frac{\overset{\text{テト}}{\cancel{32}}}{\underset{\text{ナ}}{9}}
 \end{aligned}$$

解答記号	正 解	配点
ア	8	2
イ	7	2
ウ	a	2
エ $r^2 + (\text{オ}-\text{カ})r + \text{キ}$	$a^2 + (a-b)r + a$	3
ク $a^2 + \text{ケ}ab - b^2$	$3a^2 + 2ab - b^2$	2
コ	4	2
サシ	16	2
ス, セ	1, 1	2
$\frac{\text{ソ}n+\text{タ}}{\text{チ}}, \text{ツ}$	$\frac{3n+2}{9}, 2$	2
$\frac{\text{テト}}{\text{ナ}}$	$\frac{32}{9}$	1

$\vec{EP} \perp \vec{CH}$ より $\vec{EP} \cdot \vec{CH} = 0$ である

$$2 \times (k+1) + (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) = 0 \text{ より}$$

$$2k+2 + a^2-3 = 0$$

$$2k = 1-a^2 \quad \text{よって } k = \frac{-a^2+1}{2} \quad \text{である}$$

$$H \text{ は } \left(\frac{-a^2+1}{2}, a \right) \text{ となる.}$$

$\vec{OP}$ と $\vec{OH}$ のなす角 θ とし, $\cos \theta = \frac{12}{13}$ のとき,

$$\vec{OP} \cdot \vec{OH} = |\vec{OP}| |\vec{OH}| \cos \theta \text{ より}$$

$$1 \times \frac{-a^2+1}{2} + a^2 = \sqrt{1+a^2} \times \sqrt{\frac{(-a^2+1)^2}{4} + a^2} \times \frac{12}{13} \quad \text{である}$$

$$\frac{a^2+1}{2} = \sqrt{(a^2+1) \times \frac{a^4-2a^2+1+4a^2}{4}} \times \frac{12}{13}$$

$$\frac{a^2+1}{2} = \sqrt{\frac{(a^2+1)^3}{4}} \times \frac{12}{13}$$

$$\frac{a^2+1}{2} = \frac{a^2+1}{2} \times \sqrt{a^2+1} \times \frac{12}{13}$$

$$\text{よって } \sqrt{a^2+1} = \frac{13}{12} \text{ より}$$

$$a^2+1 = \frac{169}{144}$$

$$a^2 = \frac{25}{144}$$

$$\text{ゆえに } a = \pm \frac{5}{12} \text{ となる}$$

解答記号	正解	配点
ア, $\sqrt{1}$	1, $\sqrt{3}$	1
-ウ	-2	1
-エ, $\frac{\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$	2
ク, $\sqrt{13}$	1, $\sqrt{3}$	2
コ サ	$\frac{4}{3}$	2
シ ス	$\frac{2}{3}$	2
-セ, $\frac{2\sqrt{13}}{3}$	$-\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
テ, $1+\sqrt{13}$	2, $a+\sqrt{3}$	2
$\frac{-a^2+1}{2}$, ハ	$\frac{-a^2+1}{2}, a$	3
$\pm \frac{5}{12}$	$\pm \frac{5}{12}$	3

(1) 事象Aのおこる回数Wは二項分布 $B(n, p)$ に従うから

$$\text{平均 } m = np = \frac{1216}{27} \quad \text{--- ①}$$

$$\text{標準偏差 } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \frac{152}{27} \quad \text{--- ②} \quad \text{かたまりに}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1216 \quad 152} \\ 2 \overline{) 608 \quad 76} \\ 2 \overline{) 304 \quad 38} \\ 152 \quad 19 \end{array}$$

$$\text{②より } np(1-p) = \frac{152^2}{27^2} \quad \text{これに ① を代入して}$$

$$\frac{1216}{27} (1-p) = \frac{152^2}{27^2}$$

$$\text{よって } 1-p = \frac{\frac{152^2}{27^2}}{\frac{1216}{27}} = \frac{152^2}{8 \times 1216} = \frac{19}{27} \quad \text{よって}$$

$$p = 1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{27} \quad \text{エ}$$

$$\text{これを ① に代入して } n \times \frac{8}{27} = \frac{1216}{27} \quad \text{よって } n = \boxed{152} \quad \text{P1ウ}$$

$$(2) \quad P(W \geq 38) = P\left(\frac{W-m}{\sigma} \geq \frac{38 - \frac{1216}{27}}{\frac{152}{27}}\right) \quad \text{これより}$$

$$\frac{38 - \frac{1216}{27}}{\frac{152}{27}} = \frac{38 \times 27 - 1216}{152} = \frac{1026 - 1216}{152} = \frac{-190}{152} = -\frac{95}{76} = -1.25 \quad \text{キクケ}$$

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 76 \overline{) 95} \\ \underline{76} \\ 190 \\ \underline{152} \\ 380 \\ \underline{380} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{よって } P(W \geq 38) = P\left(\frac{W-m}{\sigma} \geq -1.25\right)$$

$$= P(Z \geq -1.25)$$

$$= 0.5 + 0.3944$$

$$= 0.8944 \quad \text{コサ}$$

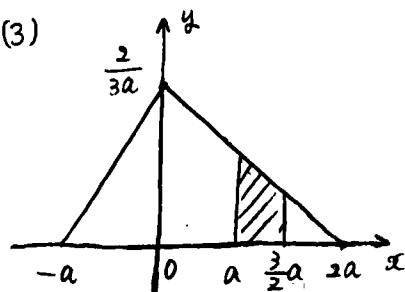
解答記号

正解

配点

アイウ	152	3
エ オカ	$\frac{8}{27}$	3
キ.クケ	1.25	3
0.コサ	0.89	3

(3)


 $y = f(x)$ のグラフは左のようになる

 $a \leq X \leq \frac{3}{2}a$ となる確率は

左の斜線部の面積だから

$$\begin{aligned}
 & \int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{1}{3a^2} (2a-x) dx \\
 &= -\frac{1}{3a^2} \left[\frac{1}{2} (x-2a)^2 \right]_a^{\frac{3}{2}a} \\
 &= -\frac{1}{3a^2} \times \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{2}a\right)^2 - (-a)^2 \right\} \\
 &= -\frac{1}{6a^2} \left(\frac{1}{4}a^2 - a^2 \right) \\
 &= \frac{1}{6a^2} \times \frac{3}{4}a^2 = \boxed{\frac{1}{8}} \text{ シ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{また } X \text{ の平均は } & \int_{-a}^0 x \cdot \frac{2}{3a^2} (x+a) dx + \int_0^{2a} x \cdot \frac{1}{3a^2} (2a-x) dx \\
 &= \frac{2}{3a^2} \int_{-a}^0 (x^2+ax) dx + \frac{1}{3a^2} \int_0^{2a} (-x^2+2ax) dx \\
 &= \frac{2}{3a^2} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 \right]_{-a}^0 + \frac{1}{3a^2} \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a} \\
 &= \frac{2}{3a^2} \left(-\frac{-a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) + \frac{1}{3a^2} \left(-\frac{1}{3} \times 8a^3 + 4a^3 \right) \\
 &= \frac{2}{3a^2} \times \left(-\frac{a^3}{6} \right) + \frac{1}{3a^2} \left(\frac{4a^3}{3} \right) \\
 &= -\frac{1}{9}a + \frac{4}{9}a = \boxed{\frac{a}{3}} \text{ セ}
 \end{aligned}$$

 さらに $Y = 2X + 7$ とおくと Y の平均は $\frac{94}{3} + \boxed{7} \text{ テ}$ となる

解答記号	正解	配点
シ	$\frac{1}{8}$	2
セ	$\frac{a}{3}$	3
タチ	$\frac{2a}{3}$	2
ツ	7	1