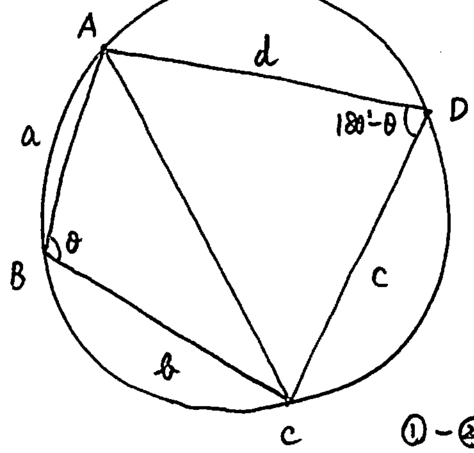

(1) 四角形ABCDが円に内接するので

$\angle ADC = 180° - \theta$ である。

$\triangle ABC$，$\triangle ADC$で余弦定理をつかうとそれぞれ

$$\begin{cases} AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta & \text{— ①} \\ AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \theta) & \text{— ②} \end{cases}$$ がなりたつ

②は $AC^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\theta$ — ②′ となるから

①−②′より $0 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - 2(ab + cd)\cos\theta$ となり

a, b, c, dはすべて正だから $ab + cd \neq 0$ より

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}}$$ —③ となる

(2) $4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$= \{2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\}$

$= \{(a^2+2ab+b^2) - (c^2-2cd+d^2)\}\{(c^2+2cd+d^2) - (a^2-2ab+b^2)\}$

$= \{(a+b)^2 - (c-d)^2\}\{(c+d)^2 - (a-b)^2\}$

$= \{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}\{(c+d)+(a-b)\}\{(c+d)-(a-b)\}$

$= \boxed{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$

(3) $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin(180° - \theta)$ であるから

$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\theta$

$= \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(ab+cd)^2\sin^2\theta}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(ab+cd)^2(1-\cos^2\theta)}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(ab+cd)^2\left\{1 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}\right\}}$ ((1)より)

$= \sqrt{\frac{1}{16}\times\{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2\}}$

$= \sqrt{\frac{1}{16}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$ ((2)より)

となる

ここで $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ とおくと $s-a = \frac{-a+b+c+d}{2}$，$s-b = \frac{a-b+c+d}{2}$，$s-c = \frac{a+b-c+d}{2}$

$s-d = \frac{a+b+c-d}{2}$ だから

$S = \sqrt{\frac{1}{16}\times 2(s-a)\times 2(s-b)\times 2(s-c)\times 2(s-d)}$ より $\boxed{S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ \text{がなりたつ}}$