

(1) 40個のうち 白球が1回だけとりだされる確率 p_1 は

$$p_1 = {}_{40}C_1 \times \left(\frac{2}{7}\right) \times \left(\frac{5}{7}\right)^{39} \text{ より}$$

$$p_1 = 40 \times \frac{2 \times 5^{39}}{7^{40}} = 8 \times 5 \times 2 \times \frac{5^{39}}{7^{40}} = \frac{16}{5} \times \left(\frac{5}{7}\right)^{40} \text{ とある}$$

(2) 40個のうち 白球が n 回だけとりだされる確率 p_n は

$$p_n = {}_{40}C_n \left(\frac{2}{7}\right)^n \left(\frac{5}{7}\right)^{40-n} \text{ より}$$

$$p_n = \frac{40!}{n! (40-n)!} \times \frac{2^n \times 5^{40-n}}{7^{40}}$$

$$\text{よって } p_{n+1} = \frac{40!}{(n+1)! \{40-(n+1)\}!} \times \frac{2^{n+1} \times 5^{40-(n+1)}}{7^{40}} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \left(\frac{\cancel{40!}}{(n+1)! \cancel{(40-n-1)!}} \times \frac{\cancel{2^{n+1}} \times \cancel{5^{40-n-1}}}{\cancel{7^{40}}} \right) \times \left(\frac{\cancel{n!} \cancel{(40-n)!}}{\cancel{40!}} \times \frac{\cancel{2^n} \times \cancel{5^{40-n}}}{\cancel{7^{40}}} \right) \\ &= \frac{\frac{2}{(n+1)} \times \frac{5}{(40-n)}}{\frac{5}{n}} \text{ である} \end{aligned}$$

(3) $p_{n+1} > p_n$ とすると $\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ だから (2) より

$$\frac{2(40-n)}{5(n+1)} > 1$$

$$\text{よって } 80 - 2n > 5n + 5 \text{ より}$$

$$7n < 75$$

$$n < \frac{75}{7} = 10.7 \dots$$

また $p_{n+1} < p_n$ とすると $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ だから (2) より

$$\frac{2(40-n)}{5(n+1)} < 1$$

$$\text{よって } 80 - 2n < 5n + 5 \text{ より}$$

$$7n > 75$$

$$n > \frac{75}{7} = 10.7 \dots$$

ゆえに $n=0, 1, 2, 3, \dots, 10$ のとき $p_n < p_{n+1}$

$n=11, 12, \dots, 39$ のとき $p_n > p_{n+1}$ である。

よって $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{10} < p_{11} > p_{12} > p_{13} > \dots > p_{40}$ がなりたつから

p_{11} が最大になる、ゆえに 白球がとりだされる確率が最大になるのは

白球が $\boxed{11}$ 個とりだされるときである