(1) $t = \sin(\beta-\alpha)$ とおくと ①から

$2\{1-\sin^2(\beta-\alpha)\} = 3\sin(\beta-\alpha)$ より

$2(1-t^2) = 3t$. だから

$2t^2+3t-2=0$ $\quad\begin{matrix}1 & & 2\\ & \times & \\ 2 & & -1\end{matrix}$

$(t+2)(2t-1)=0$

$-1 \leqq t \leqq 1$ より $t = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ ア イ

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \beta-\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$t = \sin(\beta-\alpha) = \dfrac{1}{2}$ をみたす $\beta-\alpha$ は

$\beta-\alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ ウ となる

(2) (1)により $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{6}$ であるから $y = 4\sin^2\beta - 4\cos^2\alpha$ は

$$y = 4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos^2\alpha$$
$$= 4\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 - 4\cos^2\alpha$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2 - 4\cos^2\alpha$$
$$= (\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 4\cos^2\alpha$$
$$= 3\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha$$
$$= 3(1-\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \underset{エ}{\boxed{3}} - \underset{オ}{\boxed{6}}\cos^2\alpha + \underset{カ}{\boxed{2}}\sqrt{\underset{キ}{\boxed{3}}}\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{— ②} \quad \text{となる}$$

このことから $y=3$ となるのは $-6\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha = 0$ より

$\cos\alpha = 0$ とすると
$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6} > \dfrac{\pi}{2}$
で不適

よって $\cos\alpha \neq 0$ だから 両辺 $2\cos\alpha$ で割って

$$-3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 0$$
$$\sqrt{3}\sin\alpha = 3\cos\alpha$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

よって $\tan\alpha = \sqrt{3}$ より

$\alpha = \dfrac{\pi}{\boxed{3}}$ ク $\quad \beta = \alpha + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{\boxed{2}}$ ケ のときとなる

(3) 2倍角の公式を用いると ② は

$$y = 3 - 6 \cdot \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin 2\alpha \quad \text{より}$$

$$y = \sqrt{\underset{コ}{\boxed{3}}}\sin 2\alpha - \underset{サ}{\boxed{3}}\cos 2\alpha \quad \text{であり。}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3}\left(\sin 2\alpha - \sqrt{3}\cos 2\alpha \right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha \right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\sin 2\alpha \cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \sin\frac{\pi}{3} \right) \\ &= \underset{シ}{\boxed{2}}\sqrt{\underset{ス}{\boxed{3}}}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{\underset{セ}{\boxed{3}}}\right) \quad \text{と変形できる} \end{aligned}$$

このことから $y = -\sqrt{3}$ となるのは $2\sqrt{3}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ より

$$\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \quad —③$$

ここで $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ より $2\times 0 - \frac{\pi}{3} \leqq 2\alpha - \frac{\pi}{3} \leqq 2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ だから

$-\frac{\pi}{3} \leqq 2\alpha - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$ でとくので

③の解は $2\alpha - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ より

$$2\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

よって $\alpha = \dfrac{\pi}{\underset{ソタ}{\boxed{12}}}$. $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{2}{12}\pi$$

$$= \frac{3}{12}\pi = \frac{\pi}{\underset{チ}{\boxed{4}}} \text{のときとなる}$$

解答記号	正解	配点
アイ	12	2
ウ	6	2
エオカキ	3623	2
ク	3	2
ケ	2	1
コサ	33	2
シスセ	233	2
ソタ	12	1
チ	4	1
		15点

(1) 真数条件より $3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x>0$ かつ $3^y-\left(\frac{1}{3}\right)^y>0$ だから両辺に 3^x, 3^y をそれぞれかけて

$(3^x)^2-1>0$ かつ $(3^y)^2-1>0$ より

$(3^x+1)(3^x-1)>0$ かつ $(3^y+1)(3^y-1)>0$

3^x+1, 3^y+1 はどちらも明らかに正だから

$3^x-1>0$ かつ $3^y-1>0$ より

$3^x>3^0$ かつ $3^y>3^0$

よって $x>\underset{ツ}{\boxed{0}}$ かつ $y>0$ となる

また $x<y$ のとき $3^x\underset{テ⓪}{\boxed{<}}3^y$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x\underset{ト②}{\boxed{>}}\left(\frac{1}{3}\right)^y$ であり

$-\left(\frac{1}{3}\right)^x<-\left(\frac{1}{3}\right)^y$ より

$3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x<3^y-\left(\frac{1}{3}\right)^y$ がなりたつから

$\log_3\left\{3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}<\log_3\left\{3^y-\left(\frac{1}{3}\right)^y\right\}$ がなりたつ

よって $p\underset{ナ⓪}{\boxed{<}}q$ である

(2) $x=\log_3 4$ のとき $3^x=4$ であるから $\frac{1}{3^x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{4}$ より

$$
\begin{aligned}
p &= \log_3\left\{3^x-\left(\tfrac{1}{3}\right)^x\right\} \\
&= \log_3\left(4-\tfrac{1}{4}\right) \\
&= \log_3\frac{16-1}{4} \\
&= \log_3\frac{3\times5}{4} \\
&= \log_3 3+\log_3 5-\log_3 4 \\
&= \log_3\underset{ニ}{\boxed{5}}-\underset{ヌ}{\boxed{2}}\log_3 2+\underset{ネ}{\boxed{1}}
\end{aligned}
$$

である

また $p=\log_3 4$ のとき $\log_3 4=\log_3\left\{3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}$ より

$4=3^x-\frac{1}{3^x}$ だから両辺に 3^x かけて

$4\cdot3^x=(3^x)^2-1$ より

$(3^x)^2-4\cdot3^x-1=0$

よって $3^x=2\pm\sqrt{5}$ であるが $3^x>0$ より

$3^x=2+\sqrt{5}$

よって $x=\log_3(\underset{ノ}{\boxed{2}}+\sqrt{\underset{ハ}{\boxed{5}}})$ となる

(3)　$y = 2x-1$，$q = 2p-1$ がなりたつとき.

$$\log_3\left\{3^y - \left(\frac{1}{3}\right)^y\right\} = 2\log_3\left\{3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\} - 1 \quad \text{より}$$

$$\log_3\left\{3^y - \left(\frac{1}{3}\right)^y\right\} + 1 = 2\log_3\left\{3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}$$

$$\log_3\left\{3^y - \left(\frac{1}{3}\right)^y\right\} + \log_3 3 = \log_3\left\{3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$$

$$\log_3 3\cdot\left\{3^y - \left(\frac{1}{3}\right)^y\right\} = \log_3\left\{3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$$

よって　$3\cdot\left\{3^y - \left(\frac{1}{3}\right)^y\right\} = \left\{3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$ がなりたち.

$y = 2x-1$ より

$$3\cdot\left\{3^{2x-1} - \frac{1}{3^{2x-1}}\right\} = 3^{2x} - 2\cdot 3^x\cdot\frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{2x}}$$

$$\cancel{3^{2x}} - 3^1\cdot 3^{-2x+1} = \cancel{3^{2x}} - 2 + \frac{1}{3^{2x}}$$

$$-3^{-2x+2} = -2 + 3^{-2x}.$$

$$2 = 9\cdot 3^{-2x} + 3^{-2x}$$

$$2 = 10\cdot 3^{-2x}$$

$$\frac{1}{5} = 3^{-2x}.$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3^{2x}}$$

ゆえに　$3^{2x} = 5$　だから

$2x = \log_3 5$ より

$x = \dfrac{\log_3 \boxed{5}\,\text{ヒ}}{\boxed{2}\,\text{フ}}$　となる

解答記号	正解	配点
ツ	0	1
テト	02	2
ナ	0	2
ニヌネ	521	3
ノハ	25	3
ヒフ	52	4
		15点.

(1) $f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ より

$f'(x)=\underset{ア}{\boxed{3}}x^2-\underset{イウ}{\boxed{10}}x+\underset{エ}{\boxed{3}}$

$\begin{matrix}1 & & -3\\ 3 & & -1\end{matrix}$

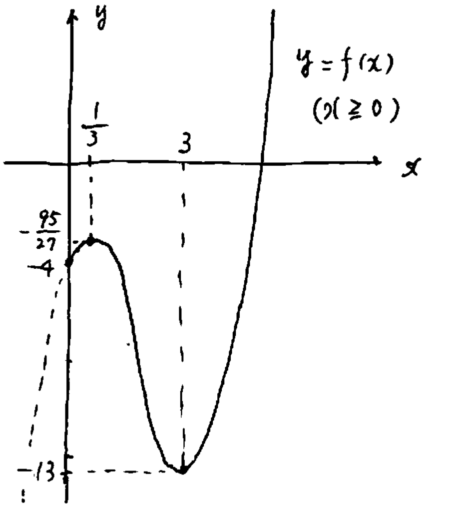
$=(x-3)(3x-1)$

よって増減表は以下のようになり

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{95}{27}$ 極大	$\searrow$	-13 極小	$\nearrow$

$x=\underset{オカ}{\boxed{\frac{1}{3}}}$ で極大値

$x=\underset{キ}{\boxed{3}}$ で極小値をとる



$f(0)=-4$

$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}-\frac{5}{9}+1-4=\frac{1-15-81}{27}=-\frac{95}{27}$

$f(3)=27-5\cdot 9+9-4=-13$.

$x\geqq 0$ での $f(x)$ の最小値は $\underset{クケコ}{\boxed{-13}}$ である

また $y=f(x)$ は x軸と1つだけ共有点をもつので

$f(x)=0$ の異なる実数解の個数は $\underset{サ}{\boxed{1}}$ 個

(2) $f'(0)=3$. で $f(0)=-4$ より $(0,f(0))$ における接線は

$y=\underset{シ}{\boxed{3}}x-\underset{ス}{\boxed{4}}$ である

また $y=x^2+px+q$ が $C(a, 3a-4)$ で接しているとすると.

$x^2+px+q=3x-4$ より

$x^2+(p-3)x+(q+4)=0$ —①

この重解 $x=\frac{-(p-3)}{2}$ が a より

$\frac{-p+3}{2}=a$ から $p=\underset{セソ}{\boxed{-2}}a+\underset{タ}{\boxed{3}}$ —②

また ①が重解をもつから (判別式) $=0$ より

$(p-3)^2-4(q+4)=0$ だから

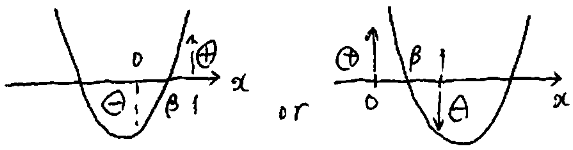
②より $p-3=-2a$ を代入して

$(-2a)^2-4(q+4)=0$ より

$4a^2-4(q+4)=0$

両辺 4でわって $a^2-q-4=0$. よって $q=a^{\overset{チ}{\boxed{2}}}-\overset{ツ}{\boxed{4}}$ —③ である

(3) (2)の放物線Cが $0 \leqq x \leqq 1$ で x軸とただ1点で交わり、この点が $(\beta, 0)$ $(0<\beta<1)$ なら



「$g(0)<0$ かつ $g(1)>0$」または「$g(0)>0$ かつ $g(1)<0$」となるから2つをまとめて

解答記号	正解	配点
アイウエ	3103	2
オカ	13	2
キ	3	2
クケコ	−13	3
サ	1	2
シス	34	2
セソタ	−23	2
チツ	24	2
テト	22	1
ナニヌ	−20	2
ネノ	02	2
ハ	5	4
ヒフヘホ	3876	4
		30点

$g(0)\cdot g(1) < 0$ とできる。

よって $q \cdot (1+p+q) < 0$ より

$(a^2-4)\cdot(1-2a+3+a^2-4)<0$ だから

$(a^2-4)\cdot(a^2-2a)<0$

$(a+2)(a-2)\cdot a(a-2)<0$

ゆえに $a\,(a+\boxed{2})\,(a-\boxed{2})^2<0$ ④ をみたす

テ　ト

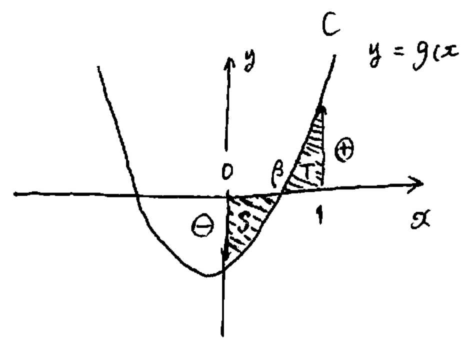
$(a-2)^2$ は負にならない、また $a-2=0$ だと ④ をみたさないので

$(a-2)^2>0$ より ④ の両辺 $(a-2)^2$ でわって

$a(a+2)<0$ より

$\boxed{-2}<a<\boxed{0}$ となる

ナニ　ヌ



このとき $g(0) = q = a^2-4 \ \boxed{<}\ 0$

ネ⓪

$g(1) = a(a-2)\ \boxed{>}\ 0$ をみたす。

ノ②

$$S=\int_0^\beta (0-g(x))\,dx=-\int_0^\beta g(x)\,dx$$

$$T=\int_\beta^1 (g(x)-0)\,dx=\int_\beta^1 g(x)\,dx$$ であるから

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^\beta g(x)\,dx+\int_\beta^1 g(x)\,dx$$

$$=\boxed{-S+T}$$ がなりたつ

ハ⑤

$S=T$ のとき $\int_0^1 g(x)\,dx=0$ であるから

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{px^2}{2}+qx\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{3}+\frac{p}{2}+q=0.$$

よって $\frac{1}{3}+\frac{-2a+3}{2}+a^2-4=0$ より

$$\frac{1}{3}-a+\frac{3}{2}+a^2-4=0$$

$$a^2-a+\frac{2+9-24}{6}=0$$

$$6a^2-6a-13=0$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9+78}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{87}}{6}$$

但し、$-2<a<0$ より

$a=\dfrac{\boxed{3}-\sqrt{\boxed{87}}}{\boxed{6}}$ となる

ヒ　フヘ　ホ

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=4 \\ (n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n=4n+2 \quad — ① \end{cases}$$

(1) ① に $n=1$ を代入して

$2\cdot a_3-5a_2+2a_1=6$ より

$2a_3-20+2=6$ から $2a_3=6+18=24$

よって $a_3=\boxed{12}$ アイ

(2) ① の左辺は

$(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}-na_{n+1}+2na_n$

$=(n+1)(a_{n+2}-\boxed{2}a_{n+1})-n(a_{n+1}-2a_n)$ より　ウ

$(n+1)(a_{n+2}-2a_{n+1})-n(a_{n+1}-2a_n)=4n+2$ である

よって $b_n=n(a_{n+1}-2a_n)$ とおくと

$b_{n+1}-b_n=4n+2$ より

$\{b_n\}$ の階差数列は 初項 $4\times1+2=\boxed{6}$ エ

公差 $\boxed{4}$ オ の等差数列である

$\{b_n\}$ の一般項は $n\geqq2$ で $b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)$

$=1\times(a_2-2a_1)+4\times\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$

$=1\times(4-2\times1)+2n(n-1)+2(n-1)$

$=2+(2n+2)(n-1)$

$=2+2(n+1)(n-1)$

$=2+2(n^2-1)$

$=2n^2$ — ②

$n=1$ のときは $b_1=1\times(a_2-2\times a_1)=1\times(4-2\times1)=2$ であり

これは ② をみたす

よって $b_n=\boxed{2}n^{\boxed{2}}$ カ キ である

ゆえに $b_n=n(a_{n+1}-2a_n)$ より

$2n^2=n(a_{n+1}-2a_n)$ であり $n\neq0$ より両辺 n でわって

$2n=a_{n+1}-2a_n$ — ② となる

これより $2(n+1)=a_{n+2}-2a_{n+1}$ — ③ もなりたつので

③ − ② より $2=(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n)$ だから

$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$c_{n+1}-2c_n=\boxed{2}$ ク である

$c_{n+1}-2c_n=2$ の両辺に2をたして

$c_{n+1}+2=2c_n+4$ より

$\left(\begin{array}{c} c-2c=2 \text{ より} \\ -c=2 \\ c=-2 \end{array}\right)$

$c_{n+1}+\underset{ケ}{\boxed{2}}=2(c_n+2)$ だから 数列 $\{c_n+2\}$ は

初項 $c_1+2=a_2-a_1+2=4-1+2=\underset{コ}{\boxed{5}}$

公比 2 の等比数列より

$c_n+2=5\times 2^{n-1}$ から

$a_{n+1}-a_n=-2+5\times 2^{n-1}$ である.

よって $n\geqq 2$ で $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2+5\times 2^{k-1})$

$$=1+(-2)\times(n-1)+\frac{5(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=1-2n+2+5\times 2^{n-1}-5.$$

$$=5\times 2^{n-1}-2n-2$$

(これは $n=1$ のとき $a_1=1$ をみたす

よって $a_n=\underset{サ}{\boxed{5}}\times\underset{シ}{\boxed{2}}^{\overset{ス①}{\boxed{n-1}}}-\underset{セ}{\boxed{2}}n-\underset{ソ}{\boxed{2}}$ となる

また、$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(5\times 2^{k-1}-2n-2)$$

$$=\frac{5(2^n-1)}{2-1}-2\times\frac{n(n+1)}{2}-2n$$

$=\underset{タ}{\boxed{5}}\times\underset{チ}{\boxed{2}}^{\overset{ツ②}{\boxed{n}}}-n^2-\underset{テ}{\boxed{3}}n-\underset{ト}{\boxed{5}}$ となる

解答記号	正解	配点
アイ	12	2
ウ	2	2
エ	6	1
オ	4	1
カキ	22	2
ク	2	2
ケ	2	1
コ	5	1
サシスセソ	52122	4
タチツテト	52235	4

20点

A(2, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 0, 1), D(x, y, z) より

(1) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}$

$=(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$

$=(1,0,-1)\cdot(1-x,1-y,-z)$

$=1\times(1-x)+0\times(1-y)-1\times(-z)$

$=\boxed{1-x+z}$ ア ⑧ ①

また $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

$=(-1,1,0)\cdot(1-x,-y,1-z)$

$=-(1-x)+1\times(-y)+0\times(1-z)$

$=\boxed{x-y-1}$ イ ⓪ ②

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{CA}=(1,0,-1)$ より

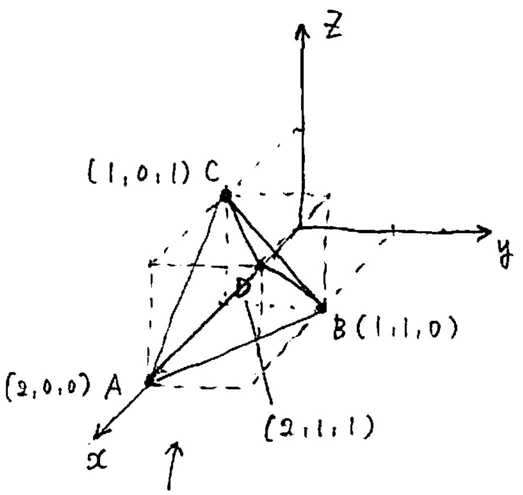
$AB=BC=CA=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{\boxed{2}}$ ウ より △ABC は正三角形

四面体 DABC が正四面体なら $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\boxed{2}}$ エ であり

$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ のどの2つのなす角も $\boxed{60}°$ オカ

よって $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos 60°=\boxed{1}$ キ となる



(計算しなくても
立方体を考えると
D(2, 1, 1) は明らか)

① ② より

$\begin{cases}-x+z+1=0\\ x-y-1=0\end{cases}$ よって $\begin{cases}z=x-1\\ y=x-1\end{cases}$ ③

また $|\overrightarrow{DA}|=\sqrt{2}$ より

$(2-x)^2+(-y)^2+(-z)^2=2$ だから

$x^2-4x+4+y^2+z^2=2$

③を代入して $x^2-4x+4+2(x-1)^2=2$ より

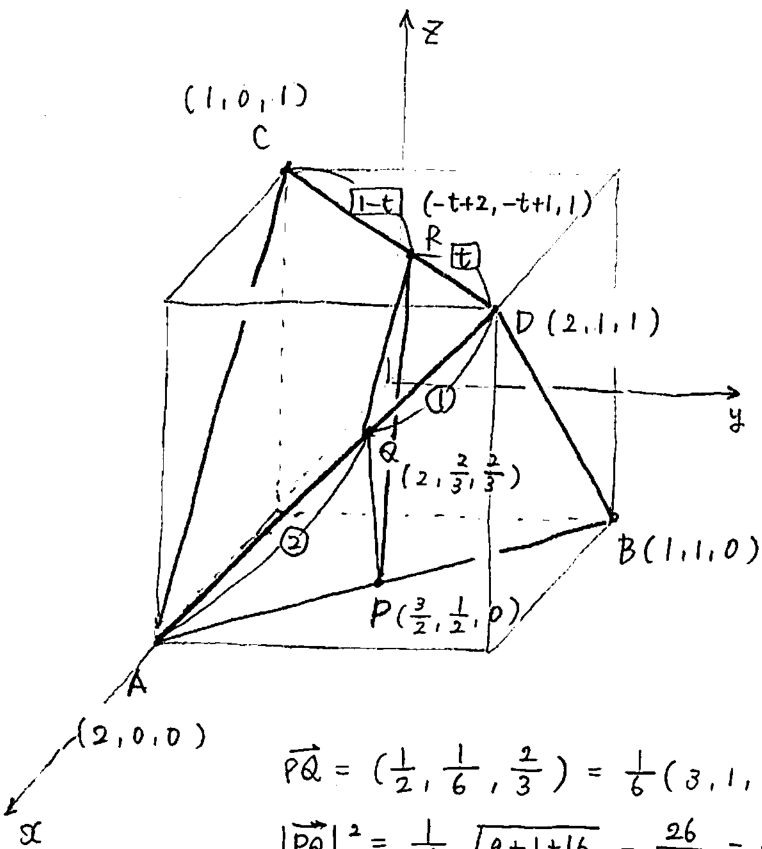
$x^2-4x+4+2x^2-4x+2=2$

$3x^2-8x+4=0$ 　　$\begin{matrix}1 & & -2\\ & \times & \\ 3 & & -2\end{matrix}$

$(x-2)(3x-2)=0$

$x>1$ より 　$x=2$ 　③より $y=z=2-1=1$

よって $(x, y, z)=(\boxed{2}, \boxed{1}, \boxed{1})$ となる
ク ケ コ



PはABの中点より $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$

$=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

QはDAを1:2に内分する点より

$\left(\frac{2\times2+1\times2}{3}, \frac{2\times1+1\times0}{3}, \frac{2\times1+1\times0}{3}\right)$

$=\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

RはDCをt:(1-t)に内分する点より

$\left((1-t)\times2+t\times1, (1-t)\times1+t\times0, (1-t)\times1+t\times1\right)$

$=(-t+2, -t+1, 1)$

$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}(3,1,4)$ より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{36}\sqrt{9+1+16}=\frac{26}{36}=\frac{\boxed{13}}{\boxed{18}}$ サシ スセ

また $\overrightarrow{PR}=\left(-t+2-\frac{3}{2}, -t+1-\frac{1}{2}, 1-0\right)$

$=\left(-t+\frac{1}{2}, -t+\frac{1}{2}, 1\right)$ より

$|\overrightarrow{PR}|^2=\left(-t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-t+\frac{1}{2}\right)^2+1^2$

$=2t^2-2t+\frac{1}{2}+1$

$=\underset{ソ}{\boxed{2}}t^2-\underset{タ}{\boxed{2}}t+\boxed{\frac{3}{2}}$ チ ツ

$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta$ なので

$S^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\sin^2\theta$ より

$4S^2=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\cos^2\theta$

$=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2$ である

ここで $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\frac{1}{6}(3,1,4)\cdot\left(-t+\frac{1}{2}, -t+\frac{1}{2}, 1\right)$

$=\frac{1}{6}\left\{3\times\left(-t+\frac{1}{2}\right)+1\times\left(-t+\frac{1}{2}\right)+4\times1\right\}$

$=\frac{1}{6}(-4t+6)=\frac{1}{3}(-2t+3)$ だから

$4S^2=\frac{13}{18}\times\left(2t^2-2t+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{9}(-2t+3)^2$

$=\frac{13}{9}t^2-\frac{13}{9}t+\frac{13}{12}-\frac{1}{9}(4t^2-12t+9)$

$=t^2-\underset{ト}{\overset{テ}{\boxed{\frac{1}{9}}}}t+\boxed{\frac{1}{12}}$ ナ ニヌ であり

$4S^2=\left(t-\frac{1}{18}\right)^2-\frac{1}{18^2}+\frac{1}{12}$ より $t=\boxed{\frac{1}{18}}$ ネ ノハ で Sは最小になる

解答記号	正解	配点
ア	8	2
イ	0	2
ウ	2	1
エ	2	1
オカ	60	1
キ	1	1
クケコ	211	2
サシスセ	1318	3
ソタチツ	2232	3
テトナニヌ	19112	3
ネノハ	118	1
		20点

(1) 1回につき 白球の出る確率が $p=\frac{3}{5}$ だから、4回では

Wの平均(期待値)は $4\times\frac{3}{5}=\boxed{\frac{12}{5}}$ アイ ウ

Wの分散は $4\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\boxed{\frac{24}{25}}$ エオ カキ であある

さらに X = (白の出る回数) − (赤の出る回数) とするとき、

白の出る回数の確率変数は W

赤の出る回数の確率変数は 4 − W であるから

$X = W-(4-W)$

$=\boxed{2}W-\boxed{4}$ ク ケ となる

よって Xの平均は $2\times(\text{Wの平均})-4=2\times\frac{12}{5}-4=\boxed{\frac{4}{5}}$ コ サ

Xの分散は $2^2\times(\text{Wの分散})=4\times\frac{24}{25}=\boxed{\frac{96}{25}}$ シス セソ となる

(2) $m=10$, $p=\frac{3}{5}$ のとき 全部で10個で白が6個 赤が4個だから、

同時に4個とりだすとき

$P(Y=0)=\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\boxed{\frac{1}{210}}$ タ チツテ

$P(Y=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{6\times4}{210}=\boxed{\frac{4}{35}}$ ト ナニ $\left(=\frac{24}{210}\right)$

$P(Y=2)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}}{210}=\frac{90}{210}$

$P(Y=3)=\frac{{}_6C_3\times{}_4C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times4}{210}=\frac{80}{210}$

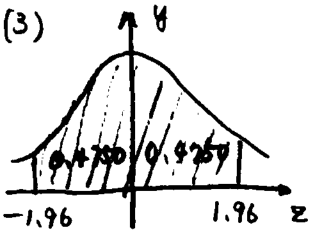
$P(Y=4)=\frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{\frac{6\cdot5}{2\cdot1}}{210}=\frac{15}{210}$

よって Yの平均は $0\times\frac{1}{210}+1\times\frac{24}{210}+2\times\frac{90}{210}+3\times\frac{80}{210}+4\times\frac{15}{210}$

$=\frac{1}{210}\times(24+180+240+60)$

$=\frac{504}{210}=\frac{252}{105}=\frac{84}{35}=\boxed{\frac{12}{5}}$ ヌネ ノ

(3)



95% の信頼区間は 正規分布表により

$$-1.96 \leqq z \leqq 1.96$$ であるから

$$-1.96 \leqq \frac{w-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqq 1.96$$ より

$$-1.96\sqrt{np(1-p)} \leqq w-np \leqq 1.96\sqrt{np(1-p)}$$

$+np$

よって $$np-1.96\sqrt{np(1-p)} \leqq w \leqq np+1.96\sqrt{np(1-p)}$$

すべての辺を n でわって $$p-1.96\sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} \leqq \frac{w}{n} \leqq p+1.96\sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}}$$ より

$r=\frac{w}{n}$ として $\frac{p(1-p)}{n}$ を $\frac{r(1-r)}{n}$ でおきかえると

$$p-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leqq r \leqq p+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$ である

左辺と中辺より $$p \leqq r+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

中辺と右辺より $$r-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leqq p$$

よって $$\boxed{r-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leqq p \leqq r+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}}$$ となる

ここで $r(1-r)=-r^2+r=-(r-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ より

$r=\frac{1}{2}$ で最大となるので 信頼区間が最大となるのは

$r=0.\underset{ハ}{\boxed{5}}$ のときである

このときの信頼区間の幅 L_1 は $L_1=2\times1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}$

$r=0.8$ のときの信頼区間の幅 L_2 は $L_2=2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$

よって $$\frac{L_2}{L_1}=\frac{2\times1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}}{2\times1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}}=\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{0.5\times0.5}}=\sqrt{\frac{\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}}}$$

$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}=\overset{ヒフ}{\boxed{0.8}}$$ となる

解答記号	正解	配点
アイウ	125	2
エオカキ	2425	2
クケ	24	2
コサ	45	2
シスセソ	9625	2
タチツテ	1210	2
トナニ	435	2
ヌネノ	125	2
ハ	5	2
ヒフ	08	2

計 20点