

第1問 [1]

$$\begin{aligned}
 (x+n)(n+5-x) &= (x+n) \{ n + (5-x) \} \\
 &= x(5-x) + nx + n(5-x) + n^2 \\
 &= x(5-x) + n^2 + \boxed{5}n \quad \text{だから}
 \end{aligned}$$

$$X = x(5-x) \text{ とおく}$$

$$(x+n)(n+5-x) = X + n^2 + 5n \quad \text{より}$$

$$n=0 \text{ のとき } x(5-x) = X$$

$$n=1 \text{ のとき } (x+1)(6-x) = X + 1^2 + 5 \times 1 = X + 6$$

$$n=2 \text{ のとき } (x+2)(7-x) = X + 2^2 + 5 \times 2 = X + 14 \quad \text{となる}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } A &= x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x) \\
 &= X(X+\boxed{6})(X+\boxed{14}) \quad \text{となる}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \text{ のとき } 2x &= 5+\sqrt{17} \quad \text{より} \\
 2x-5 &= \sqrt{17} \quad \text{だから}
 \end{aligned}$$

両辺2乗して

$$(2x-5)^2 = 17 \quad \text{より}$$

$$4x^2 - 20x + 25 = 17$$

$$4x^2 - 20x + 8 = 0$$

$$\text{よって } x(x-5) = -2 \quad \text{より}$$

$$X = x(5-x) = \boxed{2} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned}
 A &= X(X+6)(X+14) = 2 \times 8 \times 16 \\
 &= 2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{\boxed{8}} \text{カ} \quad \text{となる}
 \end{aligned}$$

解答記号	正解	配点
ア	5	2
イウエ	614	4
オ	2	2
カ	8	2

10点

[2]

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \text{ である。}$$

$A \subset C$ はなりたてない

$A \cap B = \emptyset$ はなりたつ。ゆえに $\boxed{\text{キ}}$ は ②

$$(A \cup C) \cap B = C \cap B = \{6, 12, 18\} \text{ は正しい,}$$

$$(A \cap B = \emptyset \text{ より})$$

$$\text{また } \bar{A} \cap C = \{6, 8, 12, 14, 16, 18\} \text{ だから}$$

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = \{3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

$$B \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \text{ だから}$$

$$\bar{A} \cap (B \cup C) = \{3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\} \text{ より}$$

$$(\bar{A} \cap C) \cup B = \bar{A} \cap (B \cup C) \text{ は正しい。よって } \boxed{\text{ク}} \text{ は ①}$$

解答記号	正解	配点
キ	2	3
ク	0	3
		6点

$$p: |x-2| > 2 \text{ は } x-2 < -2, 2 < x-2 \text{ よりすべての } x \text{ に } 2 \text{ をたして}$$

$$x < 0 \text{ or } 4 < x$$

$$q: x < 0$$

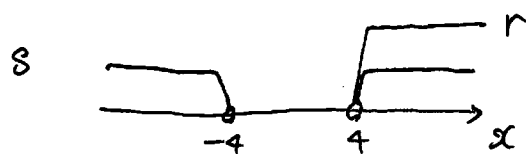
$$r: x > 4$$

$$s: \sqrt{x^2} > 4 \text{ は } |x| > 4 \text{ より } x < -4 \text{ or } 4 < x$$

解答記号	正解	配点
ケ	2	2
コ	0	2
		4点

よって q または r の x の範囲は $x < 0 \text{ or } 4 < x$. となって p と同値.

よって $\boxed{\text{ケ}}$ は ② 必要十分条件



また $r \Rightarrow s$ がなりたつので r であるためには

s の範囲に入っていることが必要.

よって $\boxed{\text{コ}}$ は必要条件.

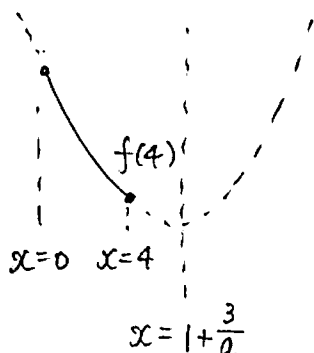
①

[3]

$$f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x - \frac{a+3}{a} \right)^2 - \frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21 \\ &= a \left\{ x - \left(1 + \frac{3}{a} \right) \right\}^2 + \frac{-a^2 - 6a - 9 - 3a^2 + 21a}{a} \\ &= a \left\{ x - \left(1 + \frac{3}{a} \right) \right\}^2 + \frac{-4a^2 + 15a - 9}{a} \end{aligned}$$

よって頂点のx座標pは $p = \boxed{1} + \frac{\boxed{3}}{a}$ シ



$0 \leq x \leq 4$ で $y = f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるのは

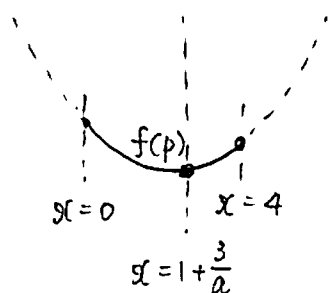
$$4 \leq 1 + \frac{3}{a} \text{ より}$$

$$3 \leq \frac{3}{a}$$

$$1 \leq \frac{1}{a}$$

a は正より 両辺に a をかけて $a \leq 1$.

よって $0 < a \leq \boxed{1}$
ヌ



$0 \leq x \leq 4$ で 最小値が $f(p)$ となるのは

$$0 \leq 1 + \frac{3}{a} \leq 4 \text{ のときであり.}$$

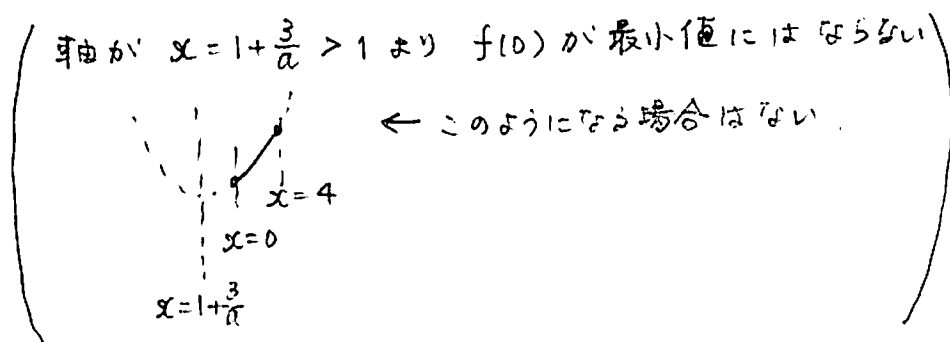
a は正より $0 \leq 1 + \frac{3}{a}$ は 明らかになりたち.

$$1 + \frac{3}{a} \leq 4 \text{ より}$$

$$\frac{3}{a} \leq 3.$$

$$\frac{1}{a} \leq 1.$$

a は正より 両辺に a をかけて $\boxed{1} \leq a$.
セ



よって $0 < a \leq 1$ のとき $f(4) = 1$ をとくと

$$16a - 8(a+3) - 3a + 21 = 1 \text{ より}$$

$$5a = 4$$

よって $a = \boxed{\frac{4}{5}}$ ヲ
(これは $0 < a \leq 1$ をみたす)

$1 \leq a$ のとき $f(p) = 1$ をとくと

$$\frac{-4a^2 + 15a - 9}{a} = 1 \text{ より}$$

$$-4a^2 + 15a - 9 = a$$

$$4a^2 - 14a + 9 = 0$$

$$\text{よって } a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{4}$$

$$3 < \sqrt{13} < 4 \text{ より } \frac{7-4}{4} < \frac{7-\sqrt{13}}{4} < \frac{7-3}{4} \text{ だから}$$

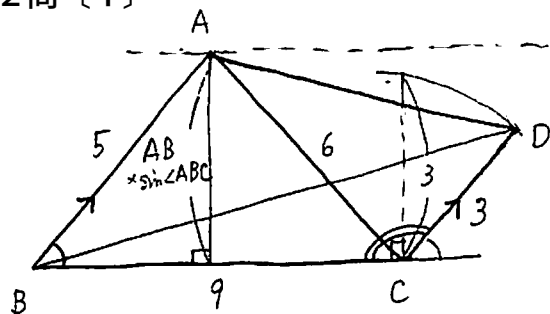
$$\frac{3}{4} < \frac{7-\sqrt{13}}{4} < 1$$

$$\text{また } \frac{7+\sqrt{13}}{4} > \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} > 1$$

$$\text{ゆえに } 1 \leq a \text{ をみたすのは } a = \frac{\boxed{7} + \sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{4}} \text{ ヲツテ}$$

解答記号	正解	配点
サシ	13	2
ス	1	2
セ	1	2
ソタ	45	2
チツテト	7134	2
10点		

第2問 [1]



$$\cos \angle ABC = \frac{5^2 + 9^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 9} = \frac{25 + 81 - 36}{90} = \frac{70}{90} = \frac{7}{9} \quad \text{ア}$$

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{81 - 49}{81}} = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad \text{ウエ}$$

$$AB \cdot \sin \angle ABC = 5 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} > \frac{20 \times 1.4}{9} = \frac{28}{9} > 3 = CD \quad \text{カ}$$

は①

よって $AD \parallel BC$ とすると上図より矛盾するから

$AB \parallel CD$ となって **キ** は ④

よって $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ となるから

$$\cos \angle BCD = \cos (180^\circ - \angle ABC) = -\cos \angle ABC = -\frac{7}{9} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \triangle BCD \text{ で余弦定理から } BD^2 &= 9^2 + 3^2 - 2 \times 9 \times 3 \times \cos \angle BCD \\ &= 81 + 9 - 2 \times 9 \times 3 \times \left(-\frac{7}{9}\right) \\ &= 90 + 42 \\ &= 132 \end{aligned}$$

$$\text{よって } BD = \boxed{2\sqrt{33}} \quad \text{とわかる}$$

クケコ

解答記号	正解	配点
ア	79	3
ウエオ	429	3
カキ	04	5
クケコ	233	4

15点

〔2〕

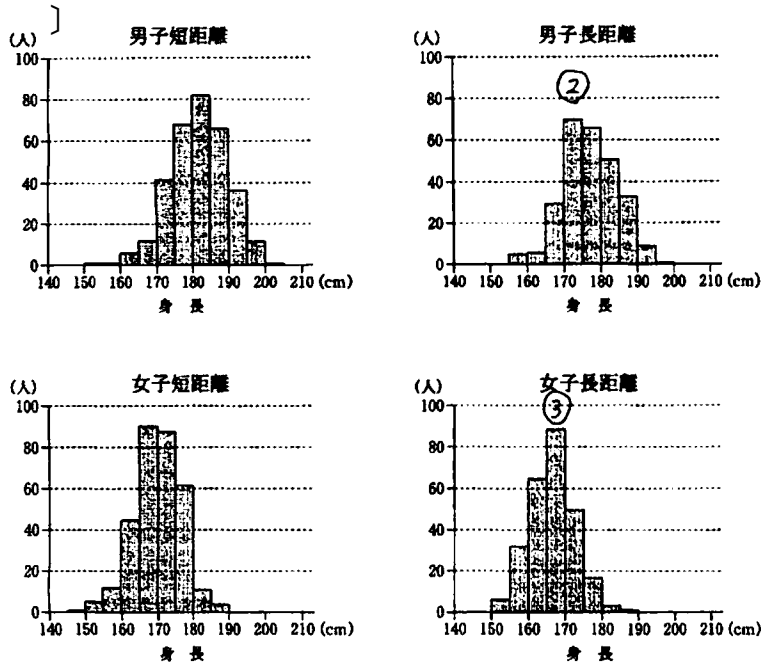


図1 身長の高さのヒストグラム

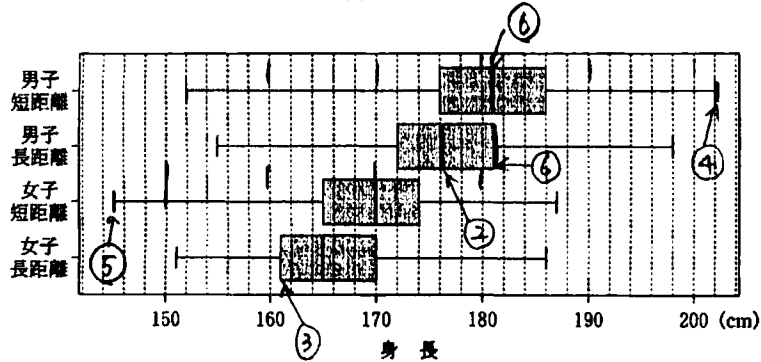


図2 身長の高さの箱ひげ図

(出典: 図1, 図2はガーディアン社のWebページにより作成)

- ③ 四つのグループのうちで範囲が最も大きいのは、女子短距離グループである。

男子短距離の範囲が50

女子短距離の範囲は40~44の間なので ×

- ④ 四つのグループのすべてにおいて、四分位範囲は12未満である。

これは正しい (はこひげ図から)

- ⑤ 男子長距離グループのヒストグラムでは、度数最大の階級に中央値が入っている。

度数最大の階級は170~175

中央値ははこひげ図より176

よって ×

- ⑥ 女子長距離グループのヒストグラムでは、度数最大の階級に第1四分位数が入っている。

度数最大の階級は165~170

第1四分位数ははこひげ図より160~162

よって ×

- ⑦ すべての選手の中で最も身長の高い選手は、男子長距離グループの中にいる。

最も身長が高い選手は

はこひげ図より男子短距離

よって ×

- ⑧ すべての選手の中で最も身長の低い選手は、女子長距離グループの中にいる。

最も身長が低い選手は

はこひげ図より女子短距離

よって ×

- ⑨ 男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第3四分位数は、ともに180以上182未満である。

はこひげ図より正しい

よって正しいのは ① と ⑥

サ

シ

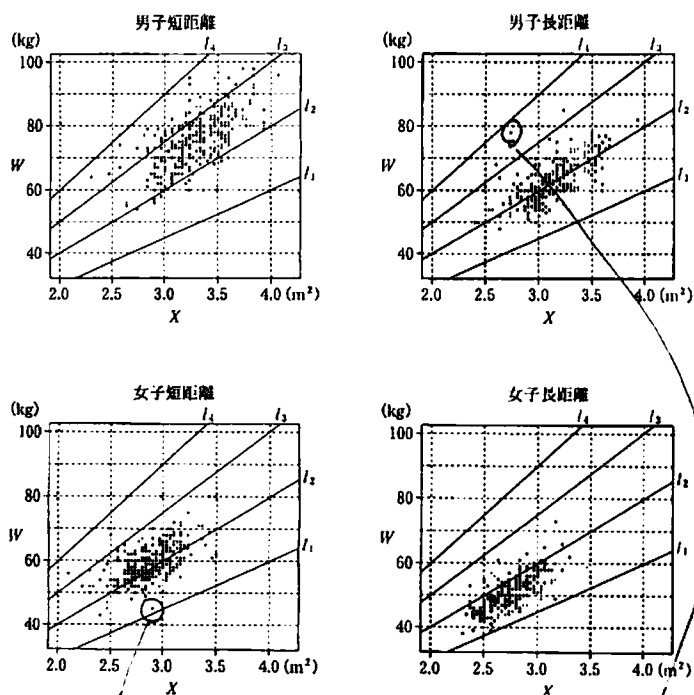


図3 XとWの散布図

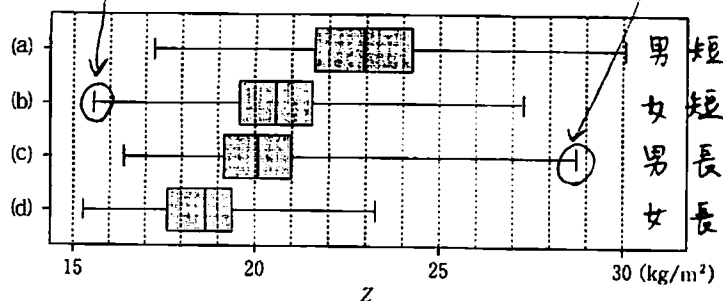


図4 Zの箱ひげ図

(出典: 図3, 図4はガーディアン社のWebページにより作成)

③ 四つのグループのすべてにおいて、XとWには負の相関がある。

グラフの散布図はすべて右上がりなので
すべて正の相関となっているので X

① 四つのグループのうちでZの中央値が一番大きいのは、男子長距離グループである。

$$Z = \frac{W}{X}$$

なので Z の傾きが Z となる

男子長距離は l_2 あたりにたくさんの
データがあるが、明らかに

男子短距離の方が l_3 寄りにデータが
ある、よって Z の中央値が一番大きいのは
男子短距離であるから X

(a) は男子短距離

(d) は女子長距離

 l_4 寄りにある点を見ると

(c) が男子長距離

(b) が女子短距離 となる

② 四つのグループのうちでZの範囲が最小なのは、男子長距離グループである。

図4から Z の範囲が最小なのは
女子長距離なので X

③ 四つのグループのうちでZの四分位範囲が最小なのは、男子短距離グループである。

図4からはひげ図の Z の四分位範囲
は 明らかに男子短距離が一番大きい
から X (a)

④ 女子長距離グループのすべての Z の値は 25 より小さい。

図4の (d) が女子長距離なので

Z は 25 よりすべて小さいところにあり、正しい。

⑤ 男子長距離グループの Z の箱ひげ図は (c) である。

 l_4 寄りにある最大値をみて

図4の (c) は男子長距離で正しい。

以上のことから $\boxed{ア}$ $\boxed{セ}$ は ④ と ⑤

解答記号	正解	配点
サシ	16 (61)	各3
スセ	45 (54)	各3

6点。

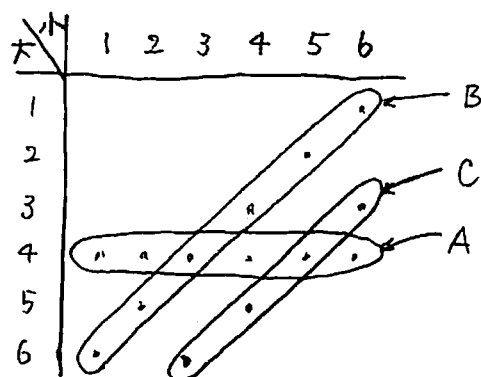
$$\begin{aligned}
& (x_1 - \bar{x})(w_1 - \bar{w}) + (x_2 - \bar{x})(w_2 - \bar{w}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(w_n - \bar{w}) \\
&= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n - \bar{x}(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \\
&\quad - \bar{w}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + n \bar{x} \bar{w} \\
&= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n - \bar{x}(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) - \cancel{n \bar{x} \bar{w}} + \cancel{n \bar{x} \bar{w}} \\
&= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n - n \bar{x} \bar{w}
\end{aligned}$$

よって $\boxed{7}$ は $\textcircled{2}$

解答記号	正解	配点
7	$\textcircled{2}$	3点

$$\left(\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \bar{x} \\ w_1 + w_2 + \cdots + w_n = n \bar{w} \end{array} \right. \quad \text{を7からた} \quad \left. \right)$$

第3問



左図のように考える

(1) 全体は36通り、A、B、Cは

それぞれ6、6、4通りある。

 $A \cap B$ は1通り、 $A \cap C$ は1通り $B \cap C$ は0通り $A \cap B \cap C$ も0通りである

$$\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}} \text{ ア}, P(B) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}} \text{ ウ}, P(C) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}} \text{ オ}$$

となる

(2) CがおこったときのAがおこる確率 $P_C(A)$ は

$$P_C(A) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \boxed{\frac{1}{4}} \text{ キ}$$

AがおこったときのCがおこる確率 $P_A(C)$ は

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \boxed{\frac{1}{6}} \text{ ケ}$$

$$(3) P(A \cap B) = \frac{1}{36}, P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{ より}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ より } \boxed{\text{サ}} \text{ は } \textcircled{1}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36}, P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{54} \text{ より}$$

$$P(A \cap C) > P(A) \cdot P(C) \text{ より } \boxed{\text{シ}} \text{ は } \textcircled{2}$$

$$(4) \text{ 1回目に事象 } A \cap B, \text{ 2回目に } \bar{A} \cap C \text{ となる確率は } \frac{1}{36} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{36} \times \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{432}} \text{ セリツ}$$

2回でA、B、Cがいちおう1回ずつおこる場合は、BとCは同時に起こらないことを考えると

$$(i) \text{ 1回目 } A \cap B, \text{ 2回目 } \bar{A} \cap C \text{ のとき } \frac{1}{36} \times \frac{3}{36} = \frac{3}{6^4}$$

$$(ii) \text{ 1回目 } \bar{A} \cap C, \text{ 2回目 } A \cap B \text{ のとき } \frac{3}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{3}{6^4}$$

$$(iii) \text{ 1回目 } A \cap C, \text{ 2回目 } \bar{A} \cap B \text{ のとき } \frac{1}{36} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{6^4}$$

$$(iv) \text{ 1回目 } \bar{A} \cap B, \text{ 2回目 } A \cap C \text{ のとき } \frac{5}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{5}{6^4}$$

$$\therefore \text{求める確率は } \frac{3}{6^4} + \frac{3}{6^4} + \frac{5}{6^4} + \frac{5}{6^4}$$

$$= \frac{16}{6^4}$$

$$= \frac{2^4}{2^4 \times 3^4} = \frac{1}{3^4} = \boxed{\frac{1}{81}} \text{ チ}$$

解答記号	正解	配点
アイ	16	2
ウエ	16	2
オカ	19	2
キク	14	2
ケコ	16	2
サ	1	2
シ	2	2
セリツ	1432	3
チツテ	181	3

20点

第4問

$$(1) \quad 144 = 2^{\text{ア}} \times 3^{\text{イ}} \quad \text{だから}$$

144の正の約数の個数は

$$5 \times 3 = 15 \text{ より}$$

$$\boxed{15} \text{個}$$

エオ

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)144} \\ 2 \overline{)72} \\ 2 \overline{)36} \\ 2 \overline{)18} \\ 3 \overline{)9} \\ 3 \end{array}$$

$$(2) \quad 144x - 7y = 1 \quad \text{--- ①} \quad \text{について}$$

$$144 = 7 \times 20 + 4 \text{ より} \quad 4 = 144 - 7 \times 20 \quad \text{--- ②}$$

$$7 = 4 \times 1 + 3 \text{ より} \quad 3 = 7 - 4 \quad \text{--- ③}$$

$$4 = 3 \times 1 + 1 \text{ より} \quad 1 = 4 - 3 \quad \text{--- ④}$$

$$\text{③を④に代入して} \quad 1 = 4 - (7 - 4) \text{ より}$$

$$1 = -7 + 2 \times 4$$

$$\text{②を代入して} \quad 1 = -7 + 2(144 - 7 \times 20)$$

$$1 = -7 + 2 \times 144 - 40 \times 7$$

$$1 = 2 \times 144 - 41 \times 7 \quad \leftarrow (288 - 287)$$

$$\text{よって} \quad 144x - 7y = 1 \quad \text{--- ①} \quad \text{は}$$

$$144 \times 2 - 7 \times 41 = 1 \quad \text{--- ⑤} \quad \text{をみたすので}$$

$$\text{①の整数解の1つは} \quad x = 2, \quad y = 41$$

$$\text{①-⑤より} \quad 144(x-2) - 7(y-41) = 0 \text{ から}$$

$$144(x-2) = 7(y-41)$$

144と7は互いに素より k を整数として

$$\left\{ \begin{array}{l} x-2 = 7k \\ y-41 = 144k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-2 = 7k \\ y-41 = 144k \end{array} \right. \quad \text{かなりたつので}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 7k + 2 \\ y = 144k + 41 \end{array} \right.$$

となる

よって x の絶対値が最小となる整数解は

$$x = \boxed{2}, \quad y = \boxed{41}$$

カ

キク

すべての整数解は

$$x = \boxed{7}k + 2$$

ケ

$$y = \boxed{144}k + 41 \quad \text{となる}$$

コサシ

$$a = 144, \quad b = 7 \text{ とすると}$$

$$a = 144 \quad \text{--- ⑦}$$

$$b = 7 \quad \text{--- ⑧}$$

$$\text{⑦-⑧} \times 20 \rightarrow a - 20b = 4 \quad \text{--- ⑨}$$

$$\text{⑧-⑨} \rightarrow -a + 21b = 3 \quad \text{--- ⑩}$$

$$\text{⑨-⑩} \rightarrow 2a - 41b = 1$$

$$\text{よって} \quad 144 \times 2 - 41 \times 7 = 1$$

をみたす

(3) $n = 144x = 7y + 1$ の整数解は 144 の倍数で、7 でわったとき 1 余る自然数 n を表すので $144x - 7y = 1$ ① をみたり

① の解は $x = 7k + 2$ (k は整数) より

$$n = 144 \times (7k + 2)$$

$$n = 2^4 \times 3^2 \times (7k + 2) \quad - \text{⑥ をみたり}$$

正の約数の個数が 18 個となる最小の n は

$$k = 0 \text{ を代入したとき } n = 2^5 \times 3^2 \text{ で正の約数 } 6 \times 3 = 18 \text{ (個) より}$$

$$\boxed{\text{ス}} \text{ は } \boxed{2} \text{ となる}$$

$$\text{また } k = 1 \text{ で } n = 2^4 \times 3^2 \times 9 = 2^4 \times 3^4 \text{ で正の約数 } 5 \times 5 = 25 \text{ (個)}$$

$$k = 2 \text{ で } n = 2^4 \times 3^2 \times 16 = 2^8 \times 3^2 \text{ で正の約数 } 9 \times 3 = 27 \text{ (個)}$$

$$k = 3 \text{ で } n = 2^4 \times 3^2 \times 23 \text{ で正の約数 } 5 \times 3 \times 2 = 30 \text{ 個}$$

よって 正の約数の個数が 30 個で最小の n は

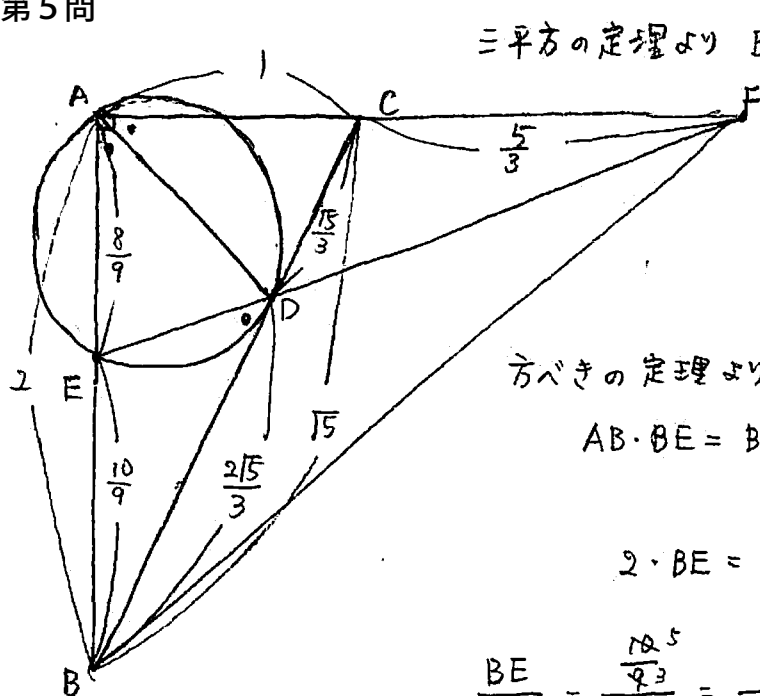
$$n = 144 \times \boxed{23} \text{ となる}$$

セソ

解答記号	正解	配点
アイウ	432	3
エオ	15	3
カ	2	2
キク	41	2
ケ	7	2
コサシ	144	2
ス	2	3
セソ	23	3

20点

第5問



三平方の定理より $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

内角二等分線の性質より

$$AB:AC = BD:DC = 2:1 \text{ から}$$

$$BD = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

方べきの定理より

$$AB \cdot BE = BD^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4 \times 5}{9} = \frac{20}{9} \quad \begin{matrix} \text{エオ} \\ \text{カ} \end{matrix} \quad \text{であるから}$$

$$2 \cdot BE = \frac{20}{9} \quad \text{or} \quad BE = \boxed{\frac{10}{9}} \quad \begin{matrix} \neq 7 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{\frac{10^5}{3}}{\frac{30}{3}} = \frac{5}{3} = \frac{15}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{15} \quad \text{24}$$

$$\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC} \quad \text{よって } \boxed{\text{コ}} \text{ は } \textcircled{\text{D}}$$

よって AC と DE の交点は $\triangle AC$ の $\boxed{C}$ 側にある

サ ④

解答記号	正解	配点
アイウ	253	3
エオカ	209	3
キクケ	109	2
コサ	04	4
シス	58	3
セソ	53	2
タ	1	3

2015

メネラウスの定理より

$$\frac{AF}{FC} \times \frac{CD}{DB} \times \frac{BE}{EA} = 1 \text{ であるから } \frac{AF}{FC} \times \frac{\frac{15}{3}}{\frac{27}{3}} \times \frac{\frac{10}{9}}{\frac{8}{9}} = 1 \text{ であり}$$

$$\frac{AF}{FC} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{5}{8} \quad \text{だから}$$

$$AC:CF = 3:5$$

CF = 3.15

4210 CF = AC $\times \frac{5}{3} = 1 \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$ $\frac{5}{3}$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3} \text{ cm/s}$$

$$AB:BF = AC:CF = 1:\frac{5}{3} \quad \text{より}$$

BCは $\angle ABF$ の内角に等分線

また AD は $\angle BAF$ の内角二等分線より

Dは $\triangle ABF$ の内心となる

