

(1) $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 3$ (p, q は実数) とおける

$f(x) = 0$ は $1, \alpha, \beta$ を解にもつから 3次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = -p & \text{--- ①} \\ 1 \times \alpha + \alpha\beta + \beta \times 1 = q & \text{--- ②} \\ 1 \times \alpha \times \beta = -3 & \text{--- ③ かなりたつ} \end{cases}$$

また、 $f(x) = 0$ が $x = \alpha$ を解にもつとすると 複素数 α に対して $\bar{\alpha}$ をその共役複素数

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha - 3 = 0 \quad \text{かなりたつから} \quad \text{とすると}$$

$$\overline{\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha - 3} = \bar{0} \quad \text{かなりたつので}$$

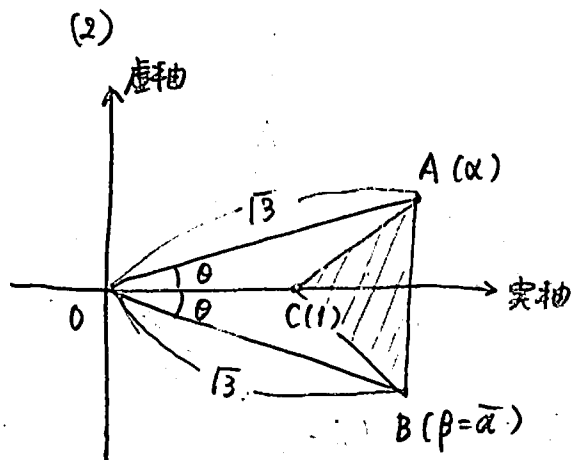
$$(\bar{\alpha})^3 + \bar{p}(\bar{\alpha})^2 + \bar{q}\bar{\alpha} - \bar{3} = \bar{0} \quad \text{であり、} p, q, 3 \text{ は実数より}$$

$$(\bar{\alpha})^3 + p(\bar{\alpha})^2 + q\bar{\alpha} - 3 = 0 \quad \text{かなりたつ}$$

よって $x = \bar{\alpha}$ は $f(x) = 0$ の解となるから $\beta = \bar{\alpha}$ かなりたつ

$$\text{ゆえに ③より } \alpha\beta = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 3 \quad \text{となるから}$$

$$|\alpha| = \sqrt{3} \quad \text{よって } \boxed{\alpha \text{ の絶対値は } \sqrt{3}} \text{ となる}$$



$\beta = \bar{\alpha}$ であるから $\angle BOC = \angle COA = \theta$ であり

$$OA = OB = |\alpha| = \sqrt{3}, \quad OC = 1$$

また α の実部は 1 より大きく、虚部は正より

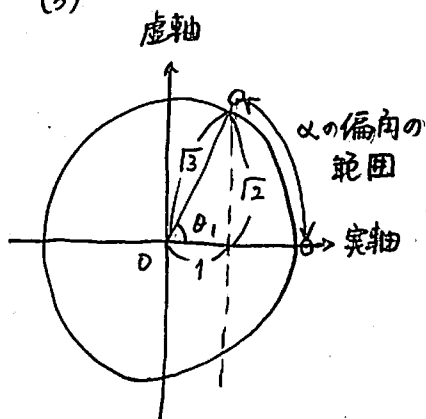
左図のようになる

$$\text{よって } S = (\triangle OAB \text{ の面積}) - 2 \times (\triangle OAC \text{ の面積}) \text{ より}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin 2\theta - 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \sin \theta}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2} \sin 2\theta - \sqrt{3} \sin \theta} \quad \text{となる}$$

(3)



α の実部は 1 より大きく、虚部は正なので

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ をみたす } 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \text{ の角を } \theta_1 \text{ とすると}$$

α の偏角の範囲は $0 < \theta < \theta_1$ である

$$\therefore \frac{dS}{d\theta} = \frac{3}{2} \times 2 \cos 2\theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 3(2 \cos^2 \theta - 1) - \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 6 \cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta - 3, \text{ であり}$$

$$6 \cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta - 3 = 0 \text{ をとくと}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+72}}{12} = \frac{\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ である}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = 6 \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

よって $0 < \theta < \theta_1$ の増減表は以下のようになる

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	θ_1
$\frac{dS}{d\theta}$		+	0	-	
S		↗	最大	↘	

ゆえに $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき S は最大となる

$$\begin{aligned} \text{このとき } S &= \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ であり} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

$$\beta = \bar{\alpha} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ である}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } p = -1 - (\alpha + \beta) = -1 - 3 = -4$$

$$\textcircled{2} \text{ より } q = \alpha\beta + (\alpha + \beta) = 3 + 3 = 6$$

$$\therefore \boxed{f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3} \text{ となる}$$