

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上の点は $(x, y) = (4\cos\theta, 2\sin\theta)$ とおけるから

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + 4(y-1)^2 \\ &= (4\cos\theta - 1)^2 + 4(2\sin\theta - 1)^2 \\ &= 16\cos^2\theta - 8\cos\theta + 1 + 16\sin^2\theta - 16\sin\theta + 4 \\ &= 16(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 8(2\sin\theta + \cos\theta) + 5 \\ &= 21 - 8\sqrt{5}\sin(\theta + \alpha) \quad \left(\text{但し, } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

とできるから

最大値は $\sin(\theta + \alpha) = -1$ のときで $21 + 8\sqrt{5}$

最小値は $\sin(\theta + \alpha) = 1$ のときで $21 - 8\sqrt{5}$ となる