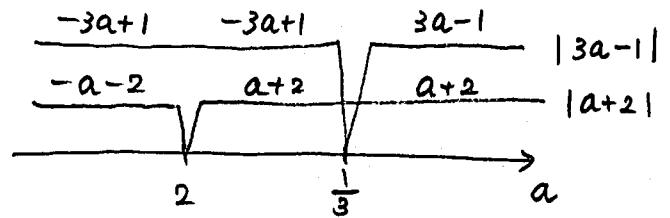


$$9a^2 - 6a + 1 = \left(\frac{3}{\text{ア}}a - \frac{1}{\text{イ}}\right)^2 \text{ である}$$

$$\text{よ} \rightarrow \text{に} \quad A = \sqrt{9a^2 - 6a + 1} + |a+2| \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(3a-1)^2} + |a+2| \\ &= |3a-1| + |a+2| \end{aligned}$$



よ $\rightarrow$

$$A = \begin{cases} (3a-1) + (a+2) = \overset{\text{ウ}}{4}a + \overset{\text{エ}}{1} & (a > \frac{1}{3} \text{ のとき}) \\ (-3a+1) + (a+2) = \overset{\text{オカ}}{-2}a + \overset{\text{キ}}{3} & (-2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき}) \\ (-3a+1) + (-a-2) = -4a-1 & (a < -2 \text{ のとき}) \end{cases} \text{ となる}$$

$$A = 2a + 13 \text{ とおくと}$$

$$\text{(i)} \quad a > \frac{1}{3} \text{ のとき} \quad 4a + 1 = 2a + 13 \text{ より}$$

$$2a = 12$$

$$a = \overset{\text{ク}}{6} \quad (\text{これは } a > \frac{1}{3} \text{ をみたすので } a = 6 \text{ は解})$$

$$\text{(ii)} \quad -2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき} \quad -2a + 3 = 2a + 13 \text{ より}$$

$$-4a = 10$$

$$a = -\frac{5}{2} \quad (\text{これは } -2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ をみたさないので不適})$$

$$\text{(iii)} \quad a < -2 \text{ のとき} \quad -4a - 1 = 2a + 13 \text{ より}$$

$$-6a = \overset{\text{ケコ}}{14}$$

$$a = \overset{\text{サ}}{\frac{-7}{3}} \quad (\text{これは } a < -2 \text{ をみたすので } a = -\frac{7}{3} \text{ は解})$$

$$\text{よ} \rightarrow \quad a = 6, -\frac{7}{3} \text{ となる}$$

解答記号	正 解	配点
(ア) $a - 1$	$(3a - 1)^2$	2
ウ) $a + 1$	$4a + 1$	2
オカ) $a + 1$	$-2a + 3$	2
ク	6	2
ケコ サ	$-\frac{7}{3}$	2

10点

(m, n は自然数)

- P : m と n はともに奇数
 q : $3mn$ は奇数
 r : $m+5n$ は偶数

(1) $\bar{P} \Leftrightarrow m$ が奇数 かつ n が奇数

$\Leftrightarrow m$ が偶数 または n が偶数 だから

m が奇数 なら n は 偶数

シ ①

m が偶数 なら n は 偶数でも奇数でもよい

ス ②

(2) q : $3mn$ は奇数 について $3, m, n$ の積が奇数より

m, n はともに奇数.

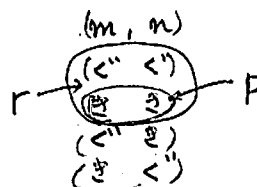
よって $p \Leftrightarrow q$ がなりたつので p は q であるための 必要十分条件

セ ③

r : $m+5n$ は偶数 について

m が偶数 なら n は偶数

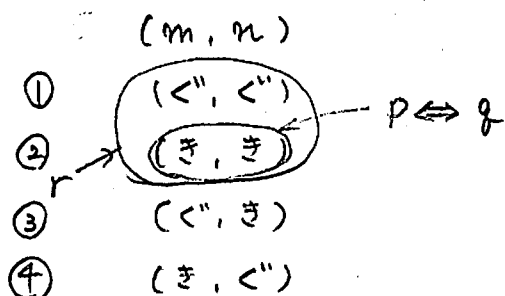
m が奇数 なら n は奇数



よって $p \Rightarrow r$ がなりたつので r を示すためには

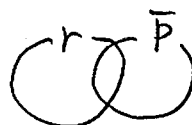
p がなりたてば "それで" 十分 である

ソ ④



$\bar{P}$ は左の ① ③ ④ の場合

r は左の ① ② の場合となるから



$\bar{P}$ は r であるための

必要条件でも
十分条件でもない

タ ⑤

解答記号	正解	配点
シ	0	2
ス	2	2
セ	0	2
ソ	2	2
タ	3	2

10点

G

(1) $y = x^2 + (2a-b)x + a^2 + 1$ より

$$\begin{aligned} y &= \left(x + a - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + 1 \\ &= \left\{x - \left(\frac{b}{2} - a\right)\right\}^2 - a^2 + ab - \frac{b^2}{4} + a^2 + 1 \\ &= \left\{x - \left(\frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} - a\right)\right\}^2 - \frac{\boxed{4}}{\boxed{4}} + ab + \boxed{1} \end{aligned}$$

(2) かつ G が $(-1, 6)$ を通るから

$$6 = 1 - (2a-b) + a^2 + 1 \text{ より}$$

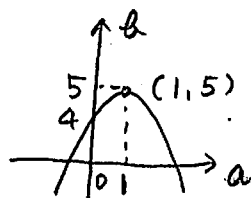
$$6 = 2 - 2a + b + a^2$$

$$b = -a^2 + 2a + 4$$

$$= -(a-1)^2 + 5$$

よって b の最大値 $\boxed{5}$

そのときの a は $a = \boxed{1}$



$b = 5, a = 1$ のとき G は

$$\begin{aligned} y &= \left(x - \left(\frac{5}{2} - 1\right)\right)^2 - \frac{25}{4} + 5 + 1 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ だから} \end{aligned}$$

$y = x^2$ を x 軸方向に $\boxed{\frac{3}{2}}$ へ、 y 軸方向に $\boxed{-\frac{1}{4}}$ へ平行移動

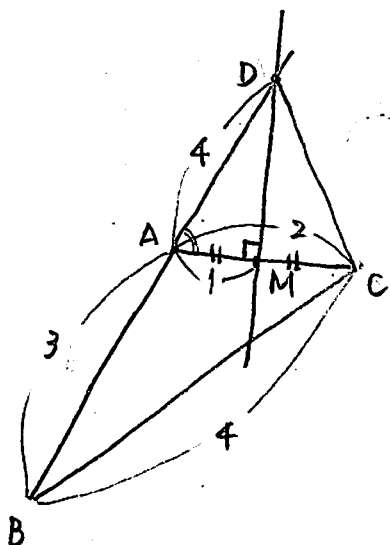
したものである

解答記号

正解

配点

$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2}$	2
$-\frac{b^2}{4} + ab + 1$	$-\frac{b^2}{4} + ab + 1$	2
ト, ナ	5, 1	2
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2



$$\cos \angle BAC = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 2} = \frac{9 + 4 - 16}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \quad \text{アイウ}$$

2"負なので $\angle BAC$ は 鈍角 である
エ②

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{オカキ} \end{aligned}$$

$$\cos \angle CAD = -\cos \angle BAC = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{クケ}$$

ACの中点をMとすると

$$\cos \angle CAD = \frac{AM}{AD} \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{AD} \quad \text{よって } AD = \boxed{4} \quad \text{コ}$$

$$\sin \angle BAC = \sin \angle DAC = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{だから}$$

$$(\triangle DBC \text{ の面積}) = (\triangle BAC \text{ の面積}) + (\triangle DAC \text{ の面積})$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle DAC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{7\sqrt{15}}{4} \quad \text{サシスセ} \quad \text{と63}$$

解答記号

正解

配点

アイ ウ, エ	$-\frac{1}{4}, 2$	4
$\frac{\sqrt{\text{オカ}}}{\text{キ}}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	3
$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\frac{1}{4}$	2
コ	4	3
$\frac{\text{サ}\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$	$\frac{7\sqrt{15}}{4}$	3

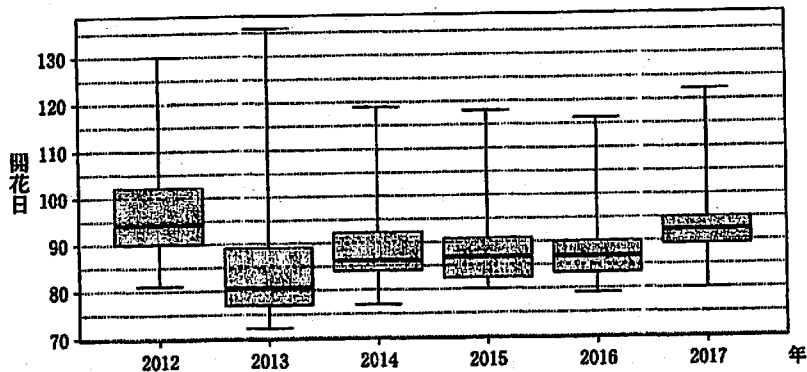


図1 ソメイヨシノの開花日の年別の箱ひげ図

①) 2013年は 最小値が70-75
最大値が135~140だから

ソ は ③

2017年は 最小値80

最大値120~125だから

タ は ④

解答記号	正解	配点
ソ	3	3
タ	4	3

6点

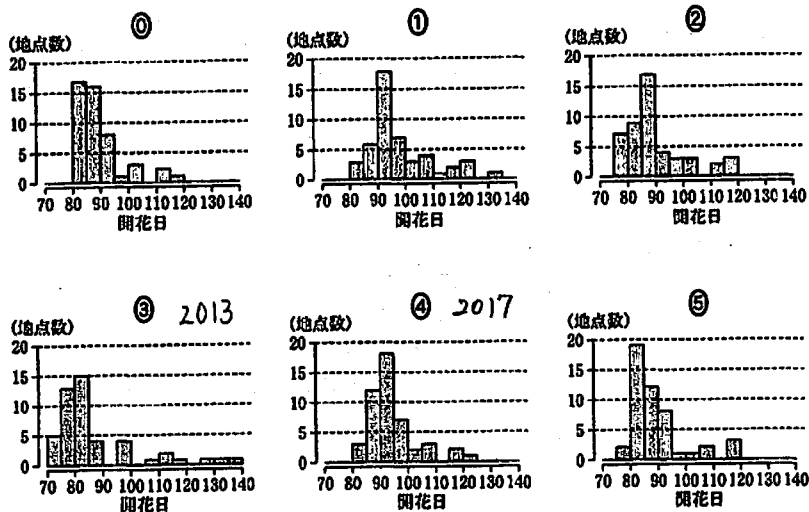


図2 ソメイヨシノの開花日の年別のヒストグラム

(出典: 図1, 図2は気象庁「生物季節観測データ」Webページにより作成)

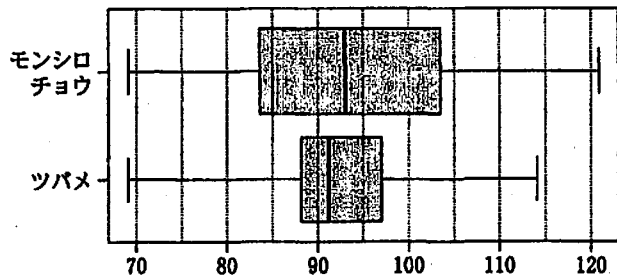


図3 モンシロチョウとツバメの初見日(2017年)の箱ひげ図

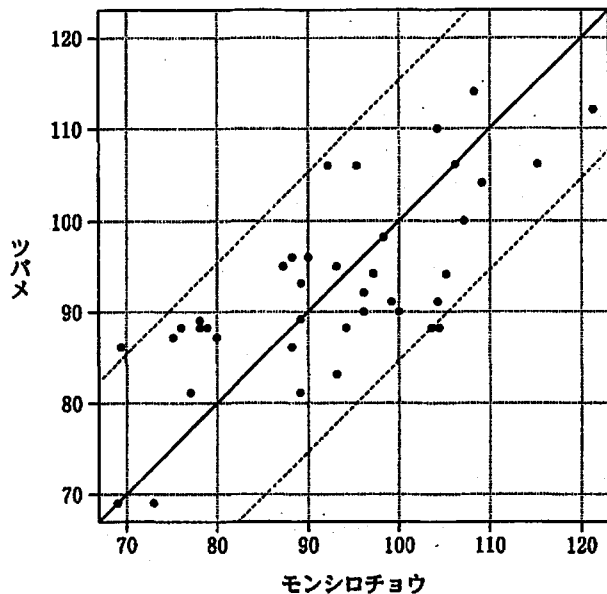


図4 モンシロチョウとツバメの初見日(2017年)の散布図

(出典: 図3, 図4は気象庁「生物季節観測データ」Webページにより作成)

- ④ モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。 $y=x$ と一番左下で交わっているのが正しい
- ① モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。 図3の最大値を比べて正しいことがわかる
- ② モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。 図3の中央値を比べて正しいことがわかる
- ③ モンシロチョウの初見日の四分位範囲はツバメの初見日の四分位範囲の3倍より小さい。
- ④ モンシロチョウの初見日の四分位範囲は15日以下である。 図3より正しくない
- ⑤ ツバメの初見日の四分位範囲は15日以下である。
- 図3より正しい。(微妙だが④⑦が正しくないの? これは正しい)
- ⑥ モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所が少なくとも4地点ある。 図4で $y=x$ と交わっているところが4か所あるので正しい
- ⑦ 同一地点でのモンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差は15日以下である。 図4で切り片-15と15の直線の中に入っていない点があるので正しくない

以上のことから 正しくないのは

④ と ⑦ である
チ ツ

解答記号

正解

両点、

チ, ツ	4, 7 (解答の順序は問わない)	4 (各2)
------	----------------------	-----------

4点、

$(x_1 - \bar{x}), \dots, (x_n - \bar{x})$ の平均値は

$$\frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{n\bar{x}}{n}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = \boxed{0} \text{ 正は ②}$$

上の平均が 0 より x' の平均も $\boxed{0}$ 正は ②

$$x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \text{ より } \overline{x'^2} = \frac{\frac{(x_1 - \bar{x})^2}{s^2} + \frac{(x_2 - \bar{x})^2}{s^2} + \dots + \frac{(x_n - \bar{x})^2}{s^2}}{n}$$

$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\bar{x} + (n\bar{x})^2}{n s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2 \times \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \bar{x} + (\bar{x})^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{s^2} (\overline{x^2} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2)$$

$$= \frac{1}{s^2} (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)$$

$$= \frac{1}{s^2} \times s^2 = 1$$

よって $(x'$ の分散) $= \overline{x'^2} - (\bar{x}')^2 = 1 - 0 = 1$ より

x' の標準偏差は $\boxed{1}$ 正は ①

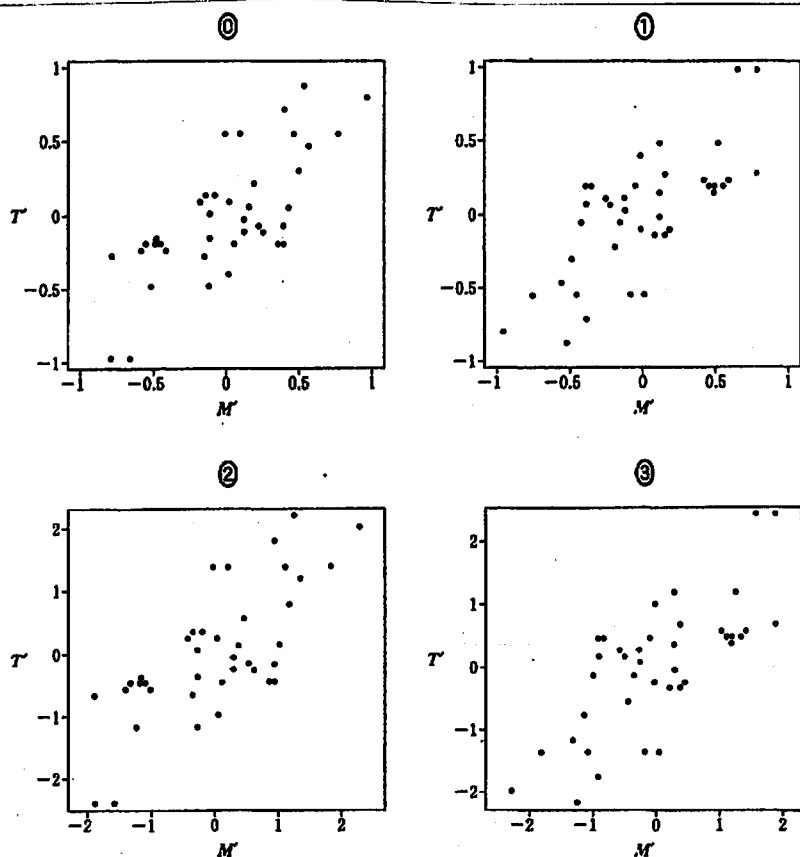


図5 四つの散布図

図3.4のデータをそれぞれ
 $x'_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ の変換で

M', T' とすると どちらも平均0
標準偏差1の分布になる

分布の形は変化しないので

①か②となるが

標準偏差が -1 から 1 までの中に
すべてのデータが収まることは
ないので (次ページ参照)

$\boxed{=}$ は ② が解となる

解答記号	正解	配点
テ	0	1
ト	0	1
ナ	1	1
ニ	2	2

一般に x の分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \quad \text{で表され}$$

すべてのデータが $\bar{x} - \sigma < x_i < \bar{x} + \sigma$ の中に入っているとすると

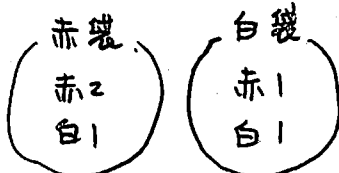
$$-\sigma < x_i - \bar{x} < \sigma \quad \text{であり}$$

$0 \leq (x_i - \bar{x})^2 < \sigma^2$ がすべてのデータで成り立つ。

$$\text{このとき} \quad \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} < \frac{\overbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}^{n \text{個}}}{n} \quad \text{より}$$

$$\sigma^2 < \frac{n\sigma^2}{n} \quad \text{となって矛盾}$$

よって すべてのデータが $\bar{x} - \sigma < x_i < \bar{x} + \sigma$ の範囲に入ることはない。



サイコロで $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$
(1, 2, 5, 6) (3 or 6)

(1) 赤い袋がえらばれ赤がでる確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}} \text{ P}$$

白い袋がえらばれ赤がでる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}} \text{ E}$$

(2) 2回目の操作で白い袋で行われる確率は

(1)の余事象を考えて

$$1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{6} \right)$$

(3) 1回目で白をとる確率が p なら

2回目で白がとりだされる確率は

$$1 \text{ 回目白で } 2 \text{ 回目白のとき } p \times \frac{1}{2}$$

$$1 \text{ 回目赤で } 2 \text{ 回目白のとき } (1-p) \times \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}(1-p) = \boxed{\frac{1}{6}}p + \frac{1}{3} \text{ となる}$$

$$\text{ここで (1) から } p = \frac{7}{18} \text{ より}$$

$$2 \text{ 回目で白がとりだされる確率は } \frac{1}{6} - \frac{7}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7+36}{108} = \boxed{\frac{43}{108}} \text{ コサ}$$

同様に考えると3回目に白がとりだされる確率は

$$\frac{1}{6}p + \frac{1}{3} \text{ に } p = \frac{43}{108} \text{ 代入して}$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{43}{108} + \frac{1}{3} = \frac{43+216}{6 \times 108} = \boxed{\frac{259}{648}} \text{ ソタチ}$$

ツテト

(4) (3) から 2回目でとりだした球が白のとき、その袋が白からとりだした確率は

$$\frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}(1-p)} = \frac{\frac{3}{6}p}{\frac{1}{6}p + \frac{2}{6}} = \frac{3p}{p+2} \text{ であり}$$

$$p = \frac{7}{18} \text{ 代入して } \frac{3 \times \frac{7}{18}}{\frac{7}{18} + 2} = \frac{21}{7+36} = \boxed{\frac{21}{43}} \text{ ナニ}$$

スネ

また3回目とりだしたのが白であるのは(3)より $\frac{259}{648}$

$$1 \text{ 回目赤がとりだされるのは (1) より } \frac{4}{9} + \frac{1}{6} = \frac{8+3}{18} = \frac{11}{18}$$

$$\text{よって } 1, 2 \text{ 回目赤で、3回目白となるのは } \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{22}{162}$$

$$\text{ゆえに } \frac{\frac{22}{162}}{\frac{259}{648}} = \frac{\frac{88}{648}}{\frac{259}{648}} = \boxed{\frac{88}{259}} \text{ ハ}$$

ヒッハ

となる

解答記号	正解	配点
ア	$\frac{4}{9}$	2
イ	$\frac{1}{6}$	2
ウ	$\frac{7}{18}$	3
エ	$\frac{1}{6}$	2
コサ	$\frac{43}{108}$	2
ソタチ	$\frac{259}{648}$	3
ツテト	$\frac{21}{43}$	3
ナニ	$\frac{88}{259}$	3
スネ		

20点

(1) $a=49, b=23$ とおく

$$a = 49 \quad \text{--- ①}$$

$$b = 23 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①}-\text{②} \times 2 \quad a - 2b = 3 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{②}-\text{③} \times 7 \quad -7a + 15b = 2 \quad \text{--- ④}$$

$$\text{③}-\text{④} \quad 8a - 17b = 1$$

よって $49 \times 8 - 23 \times 17 = 1$ --- ⑤ だから

$$49x - 23y = 1 \quad \text{--- ⑥ の 1 つの整数解の組は}$$

$$(x, y) = (8, 17)$$

⑥-⑤ より $49(x-8) - 23(y-17) = 0$ だから

$$49(x-8) = 23(y-17)$$

49 と 23 は互いに素より $\begin{cases} x-8 = 23k \\ y-17 = 49k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$ とおけるから

$$\begin{cases} x = \overset{\text{エ}}{\boxed{23}}k + 8 \\ y = \underset{\text{カキ}}{\boxed{49}}k + 17 \end{cases} \quad \text{となる}$$

このうち 自然数 x, y の組で x が最小のときは

$$k=0 \text{ のとき } (x, y) = (\underset{\text{ア}}{\boxed{2}}, \underset{\text{イウ}}{\boxed{17}})$$

(2) $A = 49x, B = 23y$ (x, y は自然数) とおけるから

$$|49x - 23y| = 1 \text{ のとき}$$

$$49x - 23y = \pm 1 \text{ である}$$

$$49x - 23y = 1 \text{ のとき } (x, y) = (23k+8, 49k+17) \quad \text{--- ⑦} \\ (k \text{ は整数})$$

$$49x - 23y = -1 \text{ のとき}$$

⑦より $49 \times (-8) - 23 \times (-17) = -1$ だから ⑦とひいて

$$49(x+8) - 23(y+17) = 0 \text{ より}$$

$$49(x+8) = 23(y+17)$$

49, 23 に互いに素より $\begin{cases} x+8 = 23l \\ y+17 = 49l \end{cases} \quad \text{よって } \begin{cases} x = 23l-8 \\ y = 49l-17 \end{cases} \quad \text{--- ⑧} \\ (l \text{ は整数})$

このうち $A = 49x$ が最小となるのは

$$\text{⑦のとき } k=0 \text{ で } x=8, y=17$$

$$\text{⑧のとき } l=1 \text{ で } x=15, y=32$$

よって $(x, y) = (\underset{\text{エ}}{\boxed{8}}, \underset{\text{イウ}}{\boxed{17}})$ となる

また $|A-B|=2$ となるのは $|49x-23y|=2$ より

$$49x-23y = \pm 2 \text{ である}$$

$$49x-23y=2 \text{ のとき}$$

⑤×2より $49 \times 16 - 23 \times 34 = 2$ であり、辺をひいて

$$49(x-16) - 23(y-34) = 0 \text{ だから}$$

$$49(x-16) = 23(y-34)$$

よって $\begin{cases} x-16 = 23m \\ y-34 = 49m \end{cases}$ より $(x, y) = (23m+16, 49m+34) \text{ --- ⑨}$
 $(m \text{ は整数})$ となる

$$49x-23y=-2 \text{ のとき}$$

⑤×(-2)より $49 \times (-16) - 23 \times (-34) = -2$ であり、辺をひいて

$$49(x+16) - 23(y+34) = 0 \text{ だから}$$

$$49(x+16) = 23(y+34)$$

よって $\begin{cases} x+16 = 23n \\ y+34 = 49n \end{cases}$ より $(x, y) = (23n-16, 49n-34) \text{ --- ⑩}$
 $(n \text{ は整数})$ となる

このうち $A=49x$ が最小となるのは

⑨のとき $m=0$ で $x=16, y=34$

⑩のとき $n=1$ で $x=7, y=15$

ゆえに $(x, y) = (\boxed{7}, \boxed{15})$ となる
 カ シス

解答記号	正解	配点
ア, イウ	8, 17	3
エオ, カキ	23, 49	2
ク, ケコ	8, 17	3
サ, シス	7, 15	3

11点

(3) 連続する3つの自然数 $a, a+1, a+2$ について

a と $a+1$ の最大公約数は 1

$a+1$ と $a+2$ の最大公約数は 1.

a と $a+2$ の最大公約数は 1 または $\boxed{2}$ である

2-7 式なので $\left(\begin{array}{l} a=3 \text{ のとき } a+2=5 \text{ で最大公約数 } 1 \\ a=2 \text{ のとき } a+2=4 \text{ で最大公約数 } 2 \end{array} \right) \text{ で } \frac{1}{2} \text{ 分}$

a と $a+1$ の最大公約数を g_1 とすると (g_1 は自然数)

$$\left\{ \begin{array}{l} a = g_1 b_1 \quad - \textcircled{1} \\ a+1 = g_1 b_2 \quad - \textcircled{2} \end{array} \right. \quad (b_1, b_2 \text{ は自然数}) \text{ がなりたち}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } 1 = g_1 (b_2 - b_1) \text{ であり}$$

$$g_1 \text{ は自然数より } g_1 = 1$$

よって a と $a+1$ の最大公約数は 1

このことから連続する2つの自然数の最大公約数は 1 となるので

$a+1$ と $a+2$ の最大公約数も 1.

また a と $a+2$ の最大公約数を g_2 とすると (g_2 は自然数)

$$\left\{ \begin{array}{l} a = g_2 b_3 \quad - \textcircled{3} \\ a+2 = g_2 b_4 \quad - \textcircled{4} \end{array} \right. \quad (b_3, b_4 \text{ は自然数}) \text{ がなりたち}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3} \text{ より } 2 = g_2 (b_4 - b_3) \text{ であり}$$

$$g_2 \text{ は自然数より } g_2 = 1 \text{ または } g_2 = 2.$$

よって a と $a+2$ の最大公約数は 1 または 2 となる

また 「 $a(a+1)(a+2)$ は m の倍数」がすべての自然数 a でなりたつような自然数 m のうち最大のものは、

$$a=1 \text{ で } a(a+1)(a+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ で } 6 \text{ の倍数}$$

$$a=2 \text{ で } a(a+1)(a+2) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ で } 6 \text{ の倍数}$$

以下 $a, a+1, a+2$ の中には必ず3の倍数が1つあり

また少なくとも1つ偶数も存在するので

$a(a+1)(a+2)$ は 6 の倍数となる

$$\text{よって } m = \boxed{6} \text{ となる}$$

ソ

$$(4) \quad 6762 = 2 \times \underset{\text{9}}{\boxed{3}} \times 7^{\overset{\text{チ}}{\boxed{2}}} \times \underset{\text{ツテ}}{\boxed{23}}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 6762} \\ 3 \overline{) 3381} \\ 7 \overline{) 1127} \\ 7 \overline{) 161} \\ 23 \end{array}$$

n を $n(n+1)(n+2)$ が 6762 の倍数となる

最小の自然数とする

このとき, $n, n+1, n+2$ のいずれかは 7^2 の倍数であり

また, このいずれかは 23 の倍数でもある

(2) より $|49x - 23y| \leq 2$ をみたす $A = 49x, B = 23y$ の中で

A が最小になるのは $(A, B) = (49 \times 7, 23 \times 15)$ のときで

このとき $49 \times 7 - 23 \times 15 = -2$ をみたす.

よって $n, n+1, n+2$ がそれぞれ 343, 344, 345 のとき

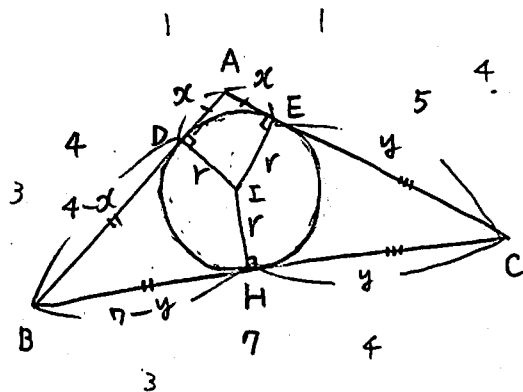
$n = 343 = 49 \times 7$ で 49 の倍数

$n+2 = 345 = 23 \times 15$ で 23 の倍数となっている

ゆえに, 求める n の値は $n = \underset{\text{トナニ}}{\boxed{343}}$ となる

解答記号	正解	配点
セ	2	2
ソ	6	2
タ, チ, ツテ	3, 2, 23	2
トナニ	343	3

9点



$$\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ より}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

また内心を I , 内接円の半径を r とすると

S は $\triangle IAB, \triangle IBC, \triangle ICA$ の面積の和より

$$S = \frac{1}{2} \times 4r + \frac{1}{2} \times 7r + \frac{1}{2} \times 5r \text{ だから}$$

$$4\sqrt{6} = \frac{1}{2} (4+7+5)r$$

$$\text{よって } 4\sqrt{6} = 8r \text{ より } r = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}} \text{ P}$$

BC と内接円の接点を H とすると,

$AD = AE = x$, $CE = CH = y$ とおけるから

$BD = 4-x$, $BH = 7-y$ であり

$BD = BH$ より $4-x = 7-y$ から

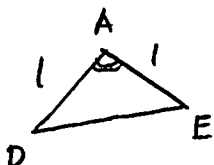
$$y = 3+x$$

また $AE + EC = 5$ より $x + y = 5$ だから

$$x + (3+x) = 5 \text{ より}$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$



ゆえに余弦定理から

$$\begin{aligned} DE^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \angle BAC \\ &= 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{12}{5} \text{ より} \end{aligned}$$

$$DE = \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\sqrt{60}}{5} = \boxed{\frac{2\sqrt{15}}{5}} \text{ Eオカ}$$

解答記号	正解	配点
$\frac{\sqrt{A}}{I}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	4
ウ	1	3
$\frac{E\sqrt{オカ}}{キ}$	$\frac{2\sqrt{15}}{5}$	3
$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{3}{4}$	2
コ	3	2
$\frac{\sqrt{サ}}{シ}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	3
$\frac{\sqrt{スセ}}{ソ}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	3

チェバの定理より

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \text{ だから}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{4}{1} = 1 \text{ より } \frac{BQ}{QC} = \boxed{\frac{3}{4}} \text{ ク}$$

よって $BQ = \boxed{3}$ コ であり Q と H は一致するので

$$IQ = r = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}} \text{ サシ}$$

また $\triangle DEF$ で正弦定理より

$$2r = \frac{DE}{\sin \angle DFE} \text{ から } \sin \angle DFE = \frac{\frac{2\sqrt{15}}{5}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{15}}{5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{よって } \cos \angle DFE = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-10}{25}} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{5}} \text{ スセ}$$

