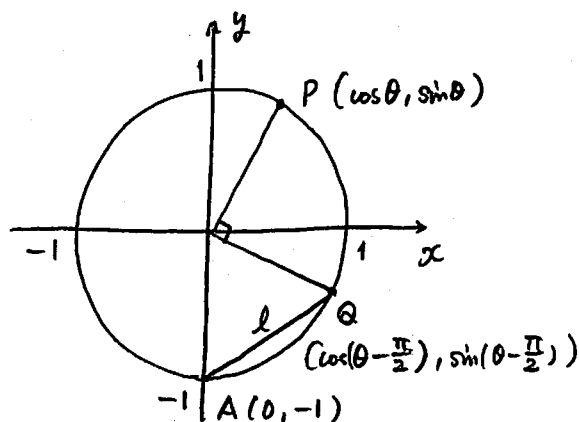




Pは $(\boxed{\cos \theta}, \boxed{\sin \theta})$ である
 7① 1②

Qは $(\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2}))$
 $= (\cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{2}, \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{2})$
 $= (\boxed{\sin \theta}, \boxed{-\cos \theta})$ である
 7② 1④

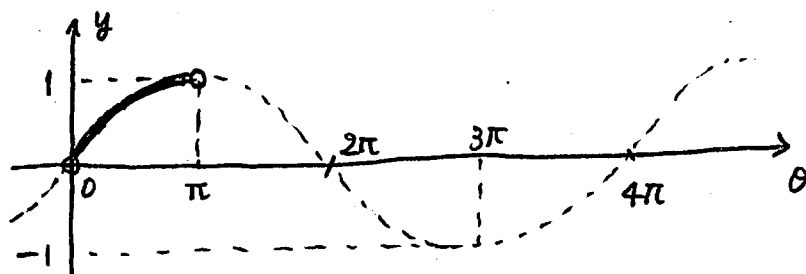
$$\begin{aligned} \text{AQの長さ } l &= \sqrt{(\sin \theta - 0)^2 + (-\cos \theta + 1)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\cos \theta + 1} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos \theta} \\ &= \sqrt{4 \times \frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \sqrt{2^2 \times \sin^2 \frac{\theta}{2}} = |2\sin \frac{\theta}{2}| = 2\sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$(0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \frac{\theta}{2} > 0)$

よって $l = 2\sin \frac{\theta}{2}$ のグラフは下のようになる

$(0 < \theta < \pi)$

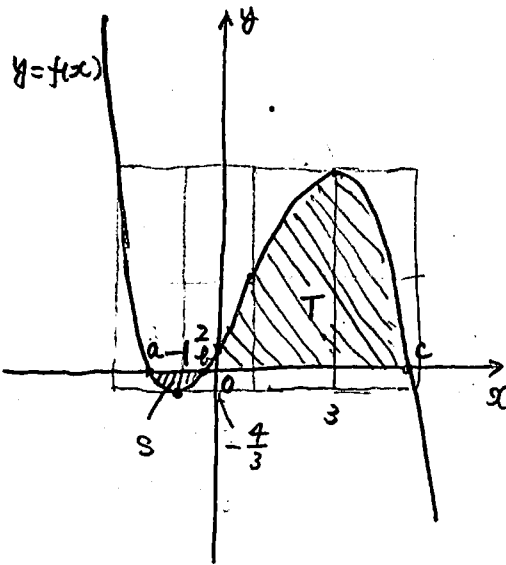
(周期 4π , 振幅2のグラフ)



ゆえに $\boxed{\text{オ}}$ は ② となる

解答記号	正解	配点
ア	10	1
ウ	04	2
オ	2	3

6点



(1) $f(x)$ が 3 次関数だから

$f'(x)$ は $\boxed{2}$ 次関数
カ

$x = -1, 3$ で極値をとるから

$f'(x)$ は $(x + \boxed{1})(x - \boxed{3})$ で割りざれる
キ 7

(2) $f'(x) = k(x+1)(x-3)$

$= k(x^2 - 2x - 3)$ とおけるので
(k は定数)

$$f(x) = \int k(x^2 - 2x - 3) dx$$

$$= \frac{k}{3}x^3 - kx^2 - 3kx + C \quad (C \text{ は定数})$$

となる。

$$f(0) = 2 \text{ より } C = 2.$$

$$\text{また } f(-1) = -\frac{4}{3} \text{ より } -\frac{k}{3} - k + 3k + 2 = -\frac{4}{3} \text{ だから}$$

$$\frac{5}{3}k = -\frac{10}{3}$$

$$\text{よって } k = -2$$

$$\text{ゆえに } f(x) = \frac{\boxed{-2}}{\text{ケコ}} x^3 + \boxed{2} x^2 + \boxed{6} x + \boxed{2} \quad \text{となる}$$

サ シ ス セ

(3) 上のグラフから $f(x) = 0$ は 3 つの実数解をもち

そのうち負の解は $\boxed{2}$ 個
ソ

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^c f(x) dx$$

$$= \boxed{-S + T}$$

9⑦

解答記号	正 解	配点
カ	2	1
$(x + \text{キ})(x - \text{ク})$	$(x + 1)(x - 3)$	2
$f(x) = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}} x^3$ + シ x^2 + ス x + セ	$f(x) = \frac{-2}{3} x^3$ + $2x^2 + 6x + 2$	3
ソ	2	2
タ	7	3

(1) $\log_{10} 2 = 0.3010$ のとき

$$10^{\boxed{0.3010}} = 2 \quad \text{①}$$

$$\text{すなわち } 10^{\frac{0.3010}{0.3010}} = 2^{\frac{1}{0.3010}} \quad \text{②}$$

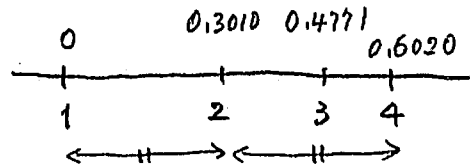
$$2^{\boxed{\frac{1}{0.3010}}} = 10 \quad \text{⑤}$$

(ii) $\log_{10} 1 = 0$

$\log_{10} 2 = 0.3010$

($\log_{10} 3 = 0.4771$)

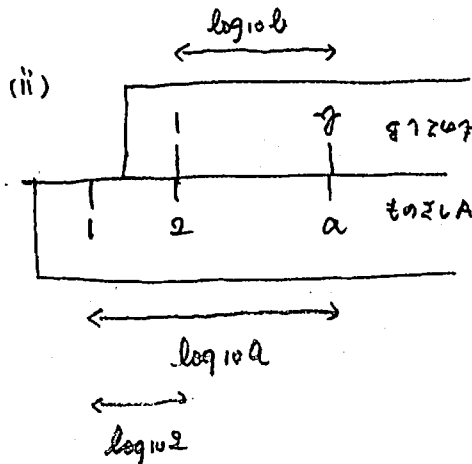
$\log_{10} 4 = 0.6020$ より



3と4の目盛りの間隔は

1と2の目盛りの間隔より小さい

すなわち ②



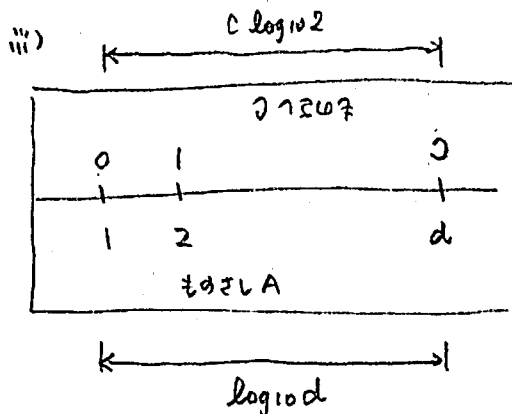
左のものより

$$\log_{10} b = \log_{10} a - \log_{10} 2 \quad \text{①}$$

$$\log_{10} b + \log_{10} 2 = \log_{10} a \quad \text{②}$$

$$\log_{10} 2b = \log_{10} a$$

$$\text{よって } \boxed{a = 2b} \quad \text{①}$$



$$c \log_{10} 2 = \log_{10} d \quad \text{②}$$

$$\log_{10} 2^c = \log_{10} d$$

$$\text{よって } \boxed{2^c = d} \quad \text{③}$$

解答方法	正解	配点
チ	1	1
ツ	5	1
テ	2	2
ト	1	3
ナ	2	3
ニ	2, 3, 4, 5 (4つマークして正解)	3

(ii) より ものまじ A と B で 2 倍したものを求めることができるので ②③

(iii) より ものまじ A と C で 2^n (n は自然数) を求めることができるので ④

また $2^c = d$ より $C = \log_2 d$ だから $\log_2 64$ も求められるから ⑤

ゆえに $\boxed{ニ}$ は ②③④⑤

1袋 100g あたり	エネルギー	脂質
A	200kcal	4g
B	300kcal	2g

(1) Aを x 袋、Bを y 袋にすると

エネルギーについて

$$200x + 300y \leq 1500 \quad \text{ア ①}$$

脂質について

$$4x + 2y \leq 16 \quad \text{イ ②}$$

(i) アより $2x + 3y \leq 15$ — ①

イより $2x + y \leq 8$ — ② である

(ii) $(x, y) = (0, 5)$ のとき $2x + 3y = 15$ より ① をみたす
 $2x + y = 5$ より ② もみたす したがって ① は正しい

$(x, y) = (5, 0)$ のとき $2x + 3y = 10$ より ① をみたす
 $2x + y = 10$ より ② はみたさない したがって ① は正しい

$(x, y) = (4, 1)$ のとき $2x + 3y = 11$ より ① をみたす
 $2x + y = 9$ より ② はみたさない したがって ② は正しい

$(x, y) = (3, 2)$ のとき $2x + 3y = 12$ より ① をみたす
 $2x + y = 8$ より ② もみたす したがって ③ は正しい

ゆえに ⑦ ⑧ は ① と ②

(iii) 食べる量の合計を $k(g)$ とすると $k = 100x + 100y$ より $y = -x + \frac{k}{100}$

これは傾き -1 , y 切片 $\frac{k}{100}$ の直線である

$2x + 3y = 15$ と $2x + y = 8$ を連立にすると

$\text{L(A)'} \quad \text{L(B)'}$

① - ② より $2y = 7$ したがって $y = \frac{7}{2}$ コサ

ゆえに $2x = 8 - y$ より

$2x = 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$ したがって $x = \frac{9}{4}$ ケ

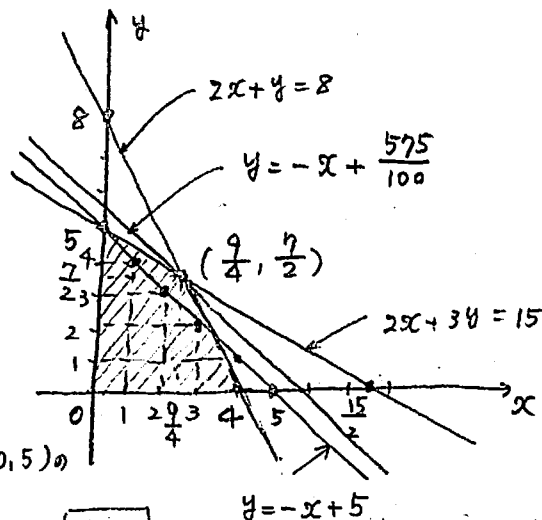
このとき $k = 100 \times \frac{9}{4} + 100 \times \frac{7}{2}$
 $= 25 \times 9 + 50 \times 7 = 225 + 350 = 575$ ナカキ

これが最大であるのは右のグラフからわかる

x, y ともに整数なら $(x, y) = (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)$ の

④通りで k は最大でありその値は

$k = 100(x + y) = 100 \times 5 = 500$ である

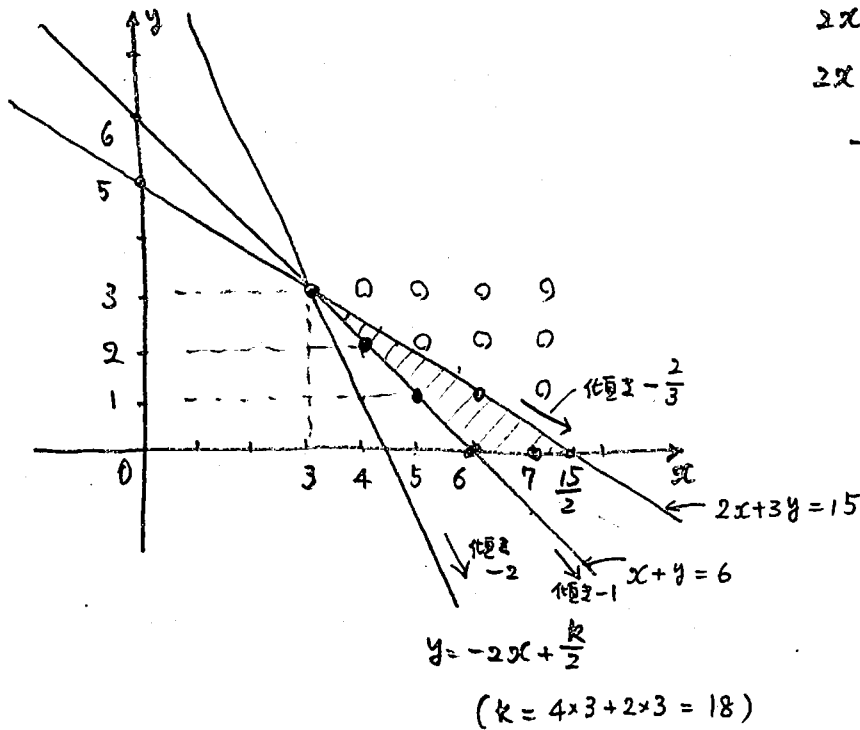


(2) (1)と同様に x, y を考えると

エネルギーについて $200x + 300y \leq 1500$ より $2x + 3y \leq 15$ — (A)

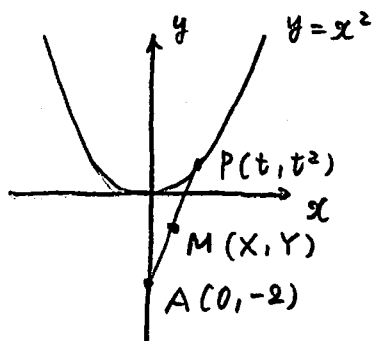
脂質を k とすると $4x + 2y = k$ から $y = -2x + \frac{k}{2}$ — (C)

食の量について $100x + 100y \geq 600$ より $x + y \geq 6$ — (D)



解答記号	正解	配点
ア	0	1
イ	2	1
ウ, エ	1, 3 (解答の順序は問わない)	2
オカキ	575	3
ク, コ ケ, サ	$\frac{9}{4}, \frac{7}{2}$	2
シスセ	500	2
ソ	4	3
タ, チ	3, 3	2
ツテ	18	3

(1) (i)



$P(t, t^2)$ とおけるから

M を (X, Y) とすると

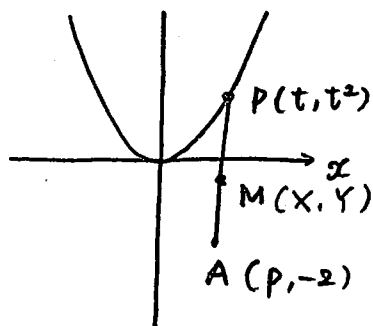
$$(X, Y) = \left(\frac{0+t}{2}, \frac{-2+t^2}{2} \right) \text{ より}$$

$$\begin{cases} X = \frac{t}{2} \\ Y = \frac{t^2-2}{2} \end{cases}$$

$$\text{よって } Y = \frac{(2X)^2-2}{2} = 2X^2-1 \text{ より}$$

$$M(X, Y) \text{ は } \boxed{Y = 2X^2 - 1} \text{ 上をうごく} \\ \text{ト①}$$

(ii)



A が $(p, -2)$ のとき

$$(X, Y) = \left(\frac{p+t}{2}, \frac{-2+t^2}{2} \right) \text{ より}$$

$$\begin{cases} X = \frac{p+t}{2} \\ Y = \frac{t^2-2}{2} \end{cases} \text{ --- ②}$$

$t = 2X - p$ を ② に代入して

$$Y = \frac{(2X-p)^2-2}{2} \text{ より}$$

$$Y = \frac{2^2(X-\frac{p}{2})^2-2}{2} = 2(X-\frac{p}{2})^2-1$$

よって $M(X, Y)$ は $y = 2(x-\frac{p}{2})^2-1$ 上をうごくので

(i) の軌跡を x 軸方向に $\boxed{\frac{p}{2}}$ 平行移動したものである
ト③

(iii) 点 A が (p, q) であり

$$q=0 \text{ とすると } (X, Y) = \left(\frac{p+t}{2}, \frac{0+t^2}{2} \right) \text{ より}$$

$$\begin{cases} X = \frac{p+t}{2} \\ Y = \frac{t^2}{2} \end{cases} \text{ --- ④}$$

④ より $t = 2X - p$ でありこれを ④ に代入して

$$Y = \frac{(2X-p)^2}{2} = \frac{4(X-\frac{p}{2})^2}{2} = 2(X-\frac{p}{2})^2$$

よって M は $y = 2(x-\frac{p}{2})^2$ 上をうごく --- ⑤

これと $y = x^2$ とを連立にすると

$$2(x-\frac{p}{2})^2 = x^2 \text{ より}$$

$$x^2 - 2px + \frac{p^2}{2} = 0 \text{ であり}$$

$$x = p \pm \sqrt{p^2 - \frac{p^2}{2}} = p \pm \frac{\sqrt{2}p}{2} \text{ であり } p \neq 0 \text{ 異なる2つの解をもつ。}$$

$q=0$ かつ $p=0$ とすると ㉔より M の軌跡は $y=2x^2$ であり

$y=x^2$ と連立にすると $2x^2=x$ より $2x(x-\frac{1}{2})=0$ よって $x=0, \frac{1}{2}$ であるが

$x=0$ のときは A も M も $(0,0)$ となって不適

よって $p=0$ かつ $q=0$ のとき 共有点は1個

また $A(p, q)$ のとき $(X, Y) = (\frac{p+t}{2}, \frac{q+t^2}{2})$ であり

$$\begin{cases} X = \frac{p+t}{2} & \text{--- ㉑} \\ Y = \frac{q+t^2}{2} & \text{--- ㉒} \end{cases}$$

㉑より $t=2X-p$ であり、これを㉒に代入して

$$Y = \frac{q+(2X-p)^2}{2} = \frac{4(X-\frac{p}{2})^2+q}{2}$$

$$Y = 2(X-\frac{p}{2})^2 + \frac{q}{2}$$

よって M の軌跡は $y = 2(x-\frac{p}{2})^2 + \frac{q}{2}$ であり

これと $y=x^2$ を連立にすると

$$x^2 = 2(x-\frac{p}{2})^2 + \frac{q}{2} \text{ より}$$

$$x^2 - 2px + \frac{p^2}{2} + \frac{q}{2} = 0$$

この判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-p)^2 - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{q}{2}\right) \\ &= \frac{p^2}{2} - \frac{q}{2} = \frac{p^2 - q}{2} \end{aligned}$$

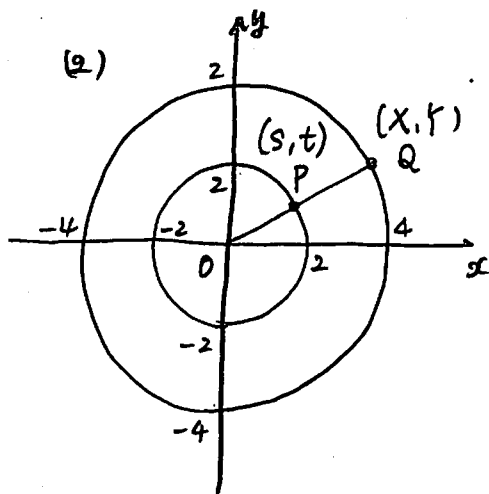
よって 異なる共有点の個数は

$$p^2 > q \text{ とき } 2 \text{ 個}$$

$$p^2 = q \text{ とき } 1 \text{ 個}$$

$$p^2 < q \text{ とき } 0 \text{ 個} \quad \text{となる}$$

以上のことから $\boxed{=}$ は ①④⑤が正しい



OQの中点Pの軌跡が

$x^2 + y^2 = 4$ とよみとれるから

P(s, t) とおくと $s^2 + t^2 = 4$ — ① をみたす.

また Q を (X, Y) とすると

$(s, t) = \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$ より

① に代入して $\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y}{2}\right)^2 = 4$ から

$$X^2 + Y^2 = 16$$

よって 円 C の方程式は $x^2 + y^2 = 16$ 又 ③ である.

(その他の円も $x^2 + y^2 = 16$ をみたす)

解答記号	正解	配点
ト	1	2
ナ	0	3
ニ	1, 4, 5 (3つマークして正解)	3
ヌ	3	3

(1) 400人のうち全く読書をしていない学生の人数の平均は

$$400 \times \frac{1}{2} = \boxed{200}$$

平均

また $p = \frac{1}{2}$, $n = 400$ のとき 標本平均比率 R は

$$R = p = \frac{1}{2} = 0.\boxed{5}$$

標本平均比率の標準偏差は $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{400}}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40} = 0.\boxed{025}$$

オカチ

$$40 \overline{) 0.025} \begin{array}{r} 0.025 \\ 100 \\ \underline{80} \\ 200 \end{array}$$

で正規分布で近似できる

(2) (i) また 母平均 24分、母標準偏差 σ のとき

標本平均 $\bar{X}$ の分布は 平均 $\boxed{24}$ 分

ツケ

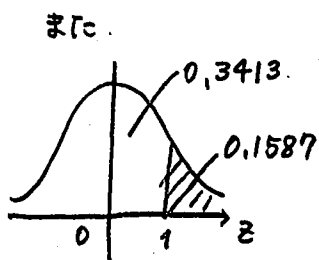
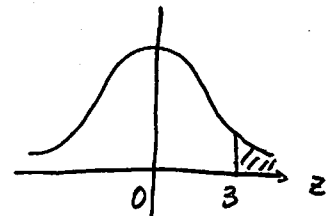
標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{400}} = \frac{\sigma}{\boxed{20}}$ 分の正規分布で近似できる

コサ

(ii) $\sigma = 40$ のとき $z = \frac{\bar{X} - 24}{\frac{40}{20}} = \frac{\bar{X} - 24}{2}$ は 標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うので

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 30) &= P\left(\frac{\bar{X} - 24}{2} \geq \frac{30 - 24}{2}\right) \\ &= P(z \geq 3) \\ &= 0.5 - p(3) \\ &= 0.5 - 0.4987 \\ &= 0.\boxed{0013} \quad \text{である} \end{aligned}$$

ミスレリ



$P(z \geq 1) = 0.1587$ (表より) であるから

$$P\left(\frac{\bar{X} - 24}{2} \geq 1\right) = 0.1587 \text{ より}$$

$$P(\bar{X} \geq 2 + 24) = 0.1587$$

$$P(\bar{X} \geq 26) = 0.1587$$

よって 標本 400 人の読書時間の平均が 26 分以上 である確率が

7 (4)

0.1587 である

(3) P大学の読書時間の母平均 m の95%信頼区間は

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \quad \text{より}$$

$$A = \boxed{\bar{X} - 1.96 \times \frac{\sigma}{20}} + \textcircled{4} \quad \text{である}$$

この意味は、「大きさ400の標本を100回無作為抽出すれば、

そのうち95回程度は信頼区間が m を含んでいる」となるのだ

ツ は 4

解答記号	正 解	配点
アイウ	200	1
0. エ	0.5	1
0. オカキ	0.025	2
クケ	24	2
$\frac{\sigma}{\text{コサ}}$	$\frac{\sigma}{20}$	2
0. シスセソ	0.0013	3
タ	4	3
チ	4	3
ツ	4	3

$$(1) \quad a_1 = 6, \quad a_{n+1} = 3a_n - 8 \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{pmatrix} C = 3C - 8 \text{ をとく?} \\ -2C = -8 \\ C = 4 \end{pmatrix}$$

①の両辺から 4 をひく

$$a_{n+1} - \boxed{4} = 3(a_n - 4) \text{ より}$$

$\{a_n - 4\}$ は 初項 $a_1 - 4 = 6 - 4 = 2$
公比 3 の等比数列だから

$$a_n - 4 = 2 \times 3^{n-1} \text{ より}$$

$$a_n = \boxed{2} \times \boxed{3}^{n-1} + \boxed{4}$$

$$(2) \quad b_1 = 4, \quad b_{n+1} = 3b_n - 8n + 6 \quad \text{--- ②}$$

$$\begin{aligned} p_n = b_{n+1} - b_n \text{ とすると } p_1 &= b_2 - b_1 \\ &= 3b_1 - 8 \times 1 + 6 - b_1 \\ &= 3 \times 4 - 8 + 6 - 4 \\ &= \boxed{6} \text{ となる} \end{aligned}$$

また ②より $b_{n+2} = 3b_{n+1} - 8(n+1) + 6 \quad \text{--- ③}$ がなりたつ

$$\text{③}-\text{②より } b_{n+2} - b_{n+1} = 3(b_{n+1} - b_n) - 8$$

$$\text{よって } p_{n+1} = \boxed{3}p_n - \boxed{8} \text{ がなりたつ}$$

$$(1) \text{と同様にして } p_{n+1} - 4 = 3(p_n - 4) \text{ より}$$

$\{p_n - 4\}$ は 初項 $p_1 - 4 = 6 - 4 = 2$
公比 3 の等比数列だから

$$p_n - 4 = 2 \times 3^{n-1} \text{ より}$$

$$p_n = \boxed{2} \times \boxed{3}^{n-1} + \boxed{4} \quad \text{--- ④}$$

$$(3) \quad b_{n+1} = 3b_n - 8n + 6 \text{ において } q_n = \boxed{b_n + sn + t} \text{ とおくと}$$

$$\boxed{b_{n+1} + s(n+1) + t} = 3(b_n + sn + t) \text{ とおけるから}$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 2sn + (3t - s - t) \text{ より}$$

$$\begin{cases} 2s = -8 \\ 2t - s = 6 \end{cases} \text{ がなりたつから}$$

$$s = \boxed{-4} \text{ , よって } 2t + 4 = 6 \text{ より}$$

$$t = \boxed{1} \text{ がなりたつ}$$

(4) (2) より $b_{n+1} - b_n = 2 \times 3^{n-1} + 4$ から

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ 時 } b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2 \times 3^{k-1} + 4) \\ &= 4 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3-1} + 4(n-1) \\ &= \boxed{3^{n-1}} + \boxed{4}n - \boxed{1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{これは } n=1 \text{ 時} \\ b_1 = 4 \text{ をみたす} \end{array} \right) \end{aligned}$$

また (3) より $b_{n+1} - 4(n+1) + 1 = 3(b_n - 4n + 1)$ だから

$\{b_n - 4n + 1\}$ は 初項 $b_1 - 4 \times 1 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$.

公比 3 の等比数列 なのよ

$$b_n - 4n + 1 = 1 \times 3^{n-1} \text{ より}$$

$$b_n = 3^{n-1} + 4n - 1 \quad \text{これと (2) も 同じになる}$$

(5) $C_1 = 16$, $C_{n+1} = 3C_n - 4n^2 - 4n - 10$ — ④ において

$$C_{n+2} = 3C_{n+1} - 4(n+1)^2 - 4(n+1) - 10 \quad \text{--- ⑤ も なりたち}$$

⑤ - ④ より $C_{n+2} - C_{n+1} = 3(C_{n+1} - C_n) - 8n - 4 - 4$

よって $d_n = C_{n+1} - C_n$ とおくと

$$d_{n+1} = 3d_n - 8n - 8 \quad \text{--- ⑥ も なりたち}$$

よって $d_{n+2} = 3d_{n+1} - 8(n+1) - 8 \quad \text{--- ⑦ も なりたち の 2"}$

⑦ - ⑥ から $d_{n+2} - d_{n+1} = 3(d_{n+1} - d_n) - 8$ より

$$d_{n+2} - d_{n+1} = e_n \text{ とおくと}$$

$$e_{n+1} = 3e_n - 8$$

よって $e_{n+1} - 4 = 3(e_n - 4)$ より

$$\begin{aligned} \{e_n - 4\} \text{ は 初項 } e_1 - 4 &= d_2 - d_1 - 4 \\ &= C_3 - C_2 - (C_2 - C_1) - 4 \\ &= C_3 - 2C_2 + C_1 - 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } C_1 &= 16 \text{ より } C_2 = 3C_1 - 4 \times 1^2 - 4 \times 1 - 10 \\ &= 3 \times 16 - 4 - 4 - 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= 3C_2 - 4 \times 2^2 - 4 \times 2 - 10 \\ &= 3 \times 30 - 16 - 8 - 10 \\ &= 56 \quad \text{よって} \end{aligned}$$

$$\text{初項 } e_1 - 4 = 56 - 2 \times 30 + 16 - 4 = 8$$

公比 3 の等比数列 なのよ

$$e_n - 4 = 8 \times 3^{n-1} \text{ から } e_n = 4 + 8 \times 3^{n-1}$$

$$\text{よって } d_{n+1} - d_n = e_n = 8 \times 3^{n-1} + 4 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ について } d_n &= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8 \times 3^{k-1} + 4) \\ &= (C_2 - C_1) + \frac{8 \times (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} + 4(n-1) \\ &= (30 - 16) + 4(3^{n-1} - 1) + 4n - 4 \\ &= 4 \times 3^{n-1} + 4n + 6 \end{aligned}$$

$$\text{これは } n=1 \text{ について } 4 + 4 \times 1 + 6 = 14 \text{ となり}$$

$$d_1 = C_2 - C_1 = 30 - 16 = 14 \text{ より } n=1 \text{ についてもなりたつ}$$

$$\text{よって } d_n = 4 \times 3^{n-1} + 4n + 6 \text{ より}$$

$$C_{n+1} - C_n = d_n = 4 \times 3^{n-1} + 4n + 6 \text{ から}$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ について } C_n &= C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4 \times 3^{k-1} + 4k + 6) \\ &= 16 + \frac{4(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} + 4 \times \frac{(n-1) \times n}{2} + 6(n-1) \\ &= 16 + 2(3^{n-1} - 1) + 2n(n-1) + 6(n-1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} + 2n^2 + 4n + 8 \end{aligned}$$

$$\text{これは } n=1 \text{ について } 2 \times 1 + 2 \times 1^2 + 4 \times 1 + 8 = 16 \text{ となり}$$

$$C_1 = 16 \text{ より } n=1 \text{ についてもなりたつ}$$

$$\text{以上のことから } C_n = \boxed{2} \times \boxed{3}^{n-1} + \boxed{2} \times n^2 + \boxed{4} \times n + \boxed{8} \text{ となる}$$

$$\textcircled{5} \text{ の別解 } C_{n+1} = 3C_n - 4n^2 - 4n - 10 \text{ において } \textcircled{8}$$

$$f_n = C_n + pn^2 + qn + r \text{ とおくと}$$

$$C_{n+1} + p(n+1)^2 + q(n+1) + r = 3 \{ C_n + pn^2 + qn + r \} \text{ の変形できる } \textcircled{9}$$

$$C_{n+1} = 3C_n + 3pn^2 - p(n+1)^2 + 3qn - q(n+1) + 3r - r \text{ より}$$

$$C_{n+1} = 3C_n + 2pn^2 - 2pn - p + 2qn - q + 2r$$

$$C_{n+1} = 3C_n + 2pn^2 + (-2p + 2q)n + (-p - q + 2r) \text{ } \textcircled{10}$$

よって ⑧, ⑩ を比較して

$$\begin{cases} -4 = 2p & \textcircled{11} \\ -4 = -2p + 2q & \textcircled{12} \\ -10 = -p - q + 2r & \textcircled{13} \end{cases} \text{ がなりたつ.}$$

$$\textcircled{11} \text{ より } p = -2, \text{ よって } \textcircled{12} \text{ は } -4 = 4 + 2q \text{ より } 2q = -8 \text{ より } q = -4$$

$$\text{よって } \textcircled{13} \text{ は } -10 = 2 + 4 + 2r \text{ より}$$

$$2r = -16$$

$$\text{よって } r = -8$$

ゆえに ⑨は

$$C_{n+1} - 2(n+1)^2 - 4(n+1) - 8 = 3(C_n - 2n^2 - 4n - 8) \quad \text{となるから}$$

$$\{C_n - 2n^2 - 4n - 8\} \text{ は 初項 } C_1 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 8 \\ = 16 - 2 - 4 - 8 = 2$$

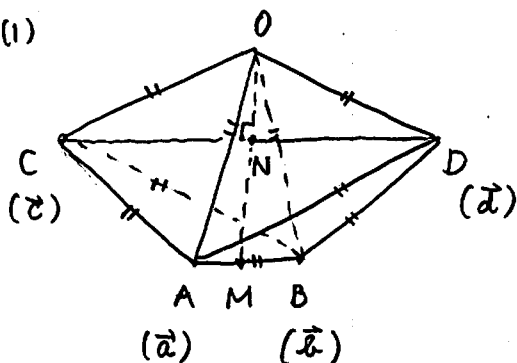
公比 3 の等比数列より

$$C_n - 2n^2 - 4n - 8 = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\text{ゆえに } C_n = \underbrace{2}_{\text{テ}} \times \underbrace{3}_{\text{ト}}^{n-1} + \underbrace{2}_{\text{ナ}} n^2 + \underbrace{4}_{\text{ニ}} n + \underbrace{8}_{\text{ヌ}} \quad \text{となる}$$

解答記号	正解	配点
ア	4	1
$a_n = \text{イ} \cdot \text{ウ}^{n-1} + \text{エ}$	$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$	2
オ	6	1
$p_{n+1} = \text{カ} p_n - \text{キ}$	$p_{n+1} = 3p_n - 8$	2
$p_n = \text{ク} \cdot \text{ケ}^{n-1} + \text{コ}$	$p_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$	2
サ, シ	3, 0	2
スセ, ソ	-4, 1	3
$b_n = \text{タ}^{n-1} + \text{チ} n - \text{ツ}$	$b_n = 3^{n-1} + 4n - 1$	3
$c_n = \text{テ} \cdot \text{ト}^{n-1} \\ + \text{ナ} n^2 + \text{ニ} n + \text{ヌ}$	$c_n = 2 \cdot 3^{n-1} \\ + 2n^2 + 4n + 8$	4

(i)



$$(i) \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} \\ &= 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) O, N, M は同一直線上にあるとすると

$$\vec{ON} = k \vec{OM} \quad \text{である}$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{CN} &= \vec{a} \cdot (\vec{ON} - \vec{OC}) \\ &= \vec{a} \cdot (k \vec{OM} - \vec{c}) \\ &= \vec{a} \cdot \left(k \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c} \right) \\ &= k \cdot \frac{|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{2} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= k \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}k - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

∴ " $\triangle OAB \perp \vec{CN}$ 及び $\vec{OA} \perp \vec{CN}$ から $\vec{OA} \cdot \vec{CN} = 0$ なのを "

$$\frac{3}{4}k - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{だから}$$

$$\frac{3k-2}{4} = 0 \quad \text{よって } k = \frac{2}{3} \quad \text{オカ}$$

(iii) $\angle COD = \theta$ とおく(方針1) $\vec{d}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表すと

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{OC} + \vec{CD} \\ &= \vec{c} + 2\vec{CN} \\ &= \vec{c} + 2(\vec{ON} - \vec{OC}) \\ &= \vec{c} + 2\left(\frac{2}{3}\vec{OM} - \vec{c}\right) \\ &= \vec{c} + \frac{4}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - 2\vec{c} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \times 1 \times \cos \theta \quad \text{から}$$

$$\vec{c} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c} \right) = \cos \theta \quad \text{より}$$

$$\frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{c}|^2 = \cos \theta$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1}{3} \quad \text{よって}$$

方針② $\vec{OM} \parallel \vec{ON}$ より $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = |\vec{OM}| |\vec{ON}|$ となりたつ

$$|\vec{ON}|^2 = \left| \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \{ |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} \} = \frac{1}{4} (1 + 1 + 2\cos\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \quad \text{①}$$

$$\therefore \vec{OM} \cdot \vec{ON} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{d})$$

$$= \frac{1}{4} (\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d}) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{②}$$

$$\text{また } |\vec{OM}|^2 = \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \{ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \}$$

$$= \frac{1}{4} (1^2 + 1^2 + 2 \times \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \quad \text{③}$$

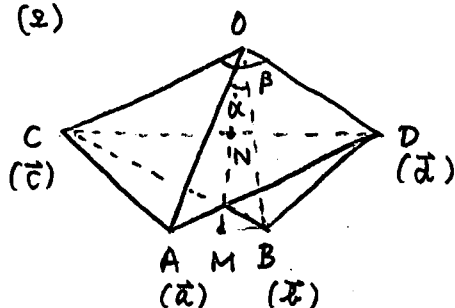
①②③を $(\vec{OM} \cdot \vec{ON})^2 = |\vec{OM}|^2 |\vec{ON}|^2$ に代入して

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1 + \cos\theta}{2} \right) \quad \text{より}$$

$$1 + \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1}{3} \quad \text{とある}$$

(2)



$\angle AOB = \alpha, \angle COD = \beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) とする

ABの中点をM, CDの中点をNとすると

O, M, Nは同一直線上にある

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos\alpha$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \times 1 \times \cos\beta \quad \text{とあり}$$

$$\vec{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad \text{より} \quad |\vec{OM}|^2 = \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \{ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \}$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1 + 2\cos\alpha)$$

$$= \frac{1 + \cos\alpha}{2} \quad \text{④}$$

同様に $\vec{ON} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$ より $|\vec{ON}|^2 = \left| \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \{ |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} \}$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1 + 2\cos\beta)$$

$$= \frac{1 + \cos\beta}{2} \quad \text{⑤}$$

$$\therefore \vec{OM} \cdot \vec{ON} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{d})$$

$$= \frac{1}{4} (\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{⑥} \quad \text{とある}$$

④⑤⑥ を $(\vec{OM} \cdot \vec{ON})^2 = |\vec{OM}|^2 |\vec{ON}|^2$ に代入して

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right) \times \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right) \text{ より}$$

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 1 \text{ となりたつ.}$$

⑨⑩

iii) $\alpha = \beta$ のとき $(1+\cos\alpha)^2 = 1$ より

$$1+\cos\alpha = \pm 1.$$

よって $\cos\alpha = -1 \pm 1$ であるが

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ より $\cos\alpha = -2$ は不適なので

$$\cos\alpha = 0 \text{ ゆえに } \alpha = \boxed{90^\circ}$$

チ

このとき $\beta = 90^\circ$ もなりたつので

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{ より } |\vec{OM}|^2 = |\vec{ON}|^2 = \frac{1}{2} \text{ より } |\vec{OM}| = |\vec{ON}| \text{ なる}$$

MとNは同一点となる

Mは平面ABC上より Nも平面ABC上

$$\text{よって } \vec{CD} = 2\vec{CN} \text{ より } \boxed{D \text{ も平面ABC上となる.}}$$

テ⑪

解答記号	正解	配点
ア	$\frac{1}{2}$	1
イ	$\frac{1}{2}$	1
ウ	$\frac{1}{2}$	1
エ	$\frac{1}{2}$	1
$k = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$	$k = \frac{2}{3}$	2
$\vec{d} = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \vec{a}$	$\vec{d} = \frac{2}{3} \vec{a}$	3
$+\frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \vec{b} - \vec{c}$	$+\frac{2}{3} \vec{b} - \vec{c}$	
サ	$\frac{1}{2}$	2
シ	$\frac{1}{2}$	2
スセ	$\frac{-1}{3}$	3
ソ	$\frac{-1}{3}$	3
タ	1	4
$\alpha = \text{チツ}^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	2
テ	1	2