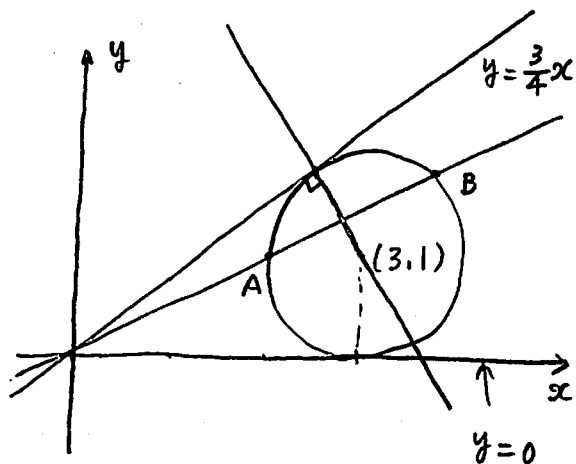




(1) 円Cの方程式は

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ より}$$

$$x^2 + y^2 - \underset{\text{ア}}{6}x - \underset{\text{イ}}{2}y + \underset{\text{ウ}}{9} = 0$$

(2) 円Cと直線ℓが接するとき

$ax - y = 0$ と $(3, 1)$ の距離が1より

$$\frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = 1 \text{ だから}$$

$$|3a-1| = \sqrt{a^2+1}$$

両辺2乗して

$$(3a-1)^2 = a^2+1 \text{ より}$$

$$8a^2 - 6a = 0$$

$$a(a - \frac{3}{4}) = 0$$

$$\text{よって } a = \underset{\text{エ}}{0}, \underset{\text{カ}}{\frac{3}{4}}$$

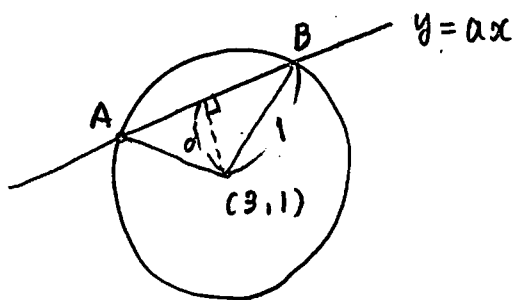
$a = \frac{3}{4}$ のとき、Cとℓの接点を通り、ℓに垂直な直線は

$(3, 1)$ 通り、傾きが $-\frac{4}{3}$ の直線だから

$$y = -\frac{4}{3}(x-3) + 1 \text{ より}$$

$$y = \underset{\text{ケ}}{\frac{-4}{3}}x + \underset{\text{コ}}{5}$$

(3)



$ax - y = 0$ と $(3, 1)$ の距離を d とすると

$$d = \frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{|3a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\text{よって } AB = 2\sqrt{1-d^2}$$

$$= 2\sqrt{1 - \frac{(3a-1)^2}{a^2+1}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(a^2+1) - (3a-1)^2}{a^2+1}}$$

$$= \underset{\text{サ}}{2}\sqrt{\frac{\underset{\text{シ}}{6}a - \underset{\text{ス}}{8}a^2}{a^2+1}}$$

$$AB = 2 \text{ ならば } 2\sqrt{\frac{6a-8a^2}{a^2+1}} = 2 \text{ より}$$

$$6a - 8a^2 = a^2 + 1 \text{ から}$$

$$9a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$(3a-1)^2 = 0$$

$$\text{よって } a = \underset{\text{セ}}{\frac{1}{3}} \underset{\text{ソ}}{\text{}}$$

解答記号	正解	配点
$x^2 + y^2 - \text{ア}x - \text{イ}y + \text{ウ}$	$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9$	2
エ	0	1
オ カ	$\frac{3}{4}$	2
キク ケ	$-\frac{4}{3}$	2
コ	5	2
サ, シ, ス	2, 6, 8	4
セ ソ	$\frac{1}{3}$	2

15点

$$(1) \log_2 \boxed{\frac{1}{4}} = 0, \log_2 \boxed{\frac{2}{4}} = 1 \text{ である.}$$

また 100 以下の自然数 x で $\log_2 x$ が 整数になるものは

$$x = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \text{ の } \boxed{7} \text{ 個 である}$$

$$(2) \quad r = \log_2 3 \text{ のとき } \log_2 54 = \log_2 (2 \times 3^3) \\ = \log_2 2^1 + \log_2 3^3 \\ = 1 + 3 \log_2 3 \\ = \boxed{3}r + \boxed{1}$$

$$2(\log_2 5 - (r+3)) \\ = \log_2 5^2 - 2r - 6 \\ = \log_2 25 - 2\log_2 3 - \log_2 2^6 \\ = \log_2 25 - \log_2 3^2 - \log_2 64 \\ = \log_2 \frac{25 \times 9}{64} = \log_2 \frac{225}{64} > \log_2 1 = 0$$

$$\therefore \log_2 5 \boxed{>} \frac{r+3}{2}$$

$$\text{また } 2\left(\log_2 \frac{1}{\sqrt{3}} - r\right) \\ = 2\left(\frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}}{\log_2 \frac{1}{2}} - r\right) \\ = 2 \cdot \frac{\log_2 3^{-\frac{1}{2}}}{-1} - 2\log_2 3$$

$$= \log_2 (3^{-\frac{1}{2}})^{-2} - \log_2 3^2$$

$$= \log_2 3^1 - \log_2 3^2$$

$$= \log_2 \frac{3}{3^2} = \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 1 = 0$$

$$\therefore \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \boxed{<} r$$

解答記号

正解

配点

$\log_2$ タ	$\log_2 1$	1
$\log_2$ チ	$\log_2 2$	1
ツ	7	1
テ r + ト	$3r + 1$	2
ナ	2	2
ニ	0	2
ヌ	0	1
ネ	4	2
ノ	3	1
ハヒ	11	2

15点

(3) $k \geq 3$ であるから

$$\log_k 1 \leq \log_k 2 < \log_k k \text{ より}$$

$$0 \leq \log_k 2 < 1 \text{ であるから } n = \boxed{0}$$

また 整数 m について

$$\frac{m}{10} \leq \log_k 2 \text{ は}$$

$$\log_k k^{\frac{m}{10}} \leq \log_k 2 \text{ であり } k \geq 3 \text{ より}$$

$$k^{\frac{m}{10}} \leq 2$$

$$\text{よって } k^m \leq 2^{10} \quad \boxed{\times} \text{ は } \textcircled{4}$$

$\log_k 2$ の小数第1位の数字を m とすると

$$m \leq 10 \log_k 2 < m+1 \text{ より}$$

$$\frac{m}{10} \leq \log_k 2 < \frac{m+1}{10}$$

$$\text{よって } \log_k k^{\frac{m}{10}} \leq \log_k 2 < \log_k k^{\frac{m+1}{10}} \text{ より}$$

$$k^{\frac{m}{10}} \leq 2 < k^{\frac{m+1}{10}}$$

$$\text{ゆえに } k^m \leq 2^{10} < k^{m+1} \text{ より}$$

$$k^m \leq 1024 < k^{m+1} \text{ となる}$$

$$m=2 \text{ のとき } k^2 \leq 1024 < k^3 \text{ であり}$$

$$k=10 \text{ で } k^2=100, k^3=1000$$

$$k=11 \text{ で } k^2=121, k^3=1331 \text{ で } \textcircled{1} \text{ をみたす}$$

$$\text{よって } k \text{ の最小値は } k = \boxed{11}$$

ハヒ

$$(1) f(x) = px^3 + qx \text{ あり}$$

$$f'(x) = 3px^2 + q \quad x=1 \text{ で極値をとるから}$$

$$f'(1) = \boxed{0} \text{ より } 3p + q = 0$$

$$\text{よって } q = \boxed{-3}p$$

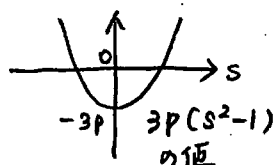
また $(s, f(s))$ における $y = f(x)$ の接線は

$$y = f'(s)(x-s) + f(s) \text{ より}$$

$$y = (3ps^2 - 3p)(x-s) + ps^3 - 3ps$$

$$= (\boxed{3}ps^2 - \boxed{3}p)x - \boxed{2}ps^3$$

$$= 3p(s^2 - 1)x - 2ps^3 \quad \text{--- ①}$$

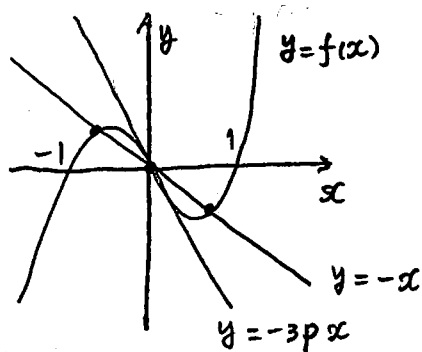


よって ① の傾きは $s = \boxed{0}$ のとき

最小値 $\boxed{-3}p$ となる

$$(2) f(x) = px^3 - 3px$$

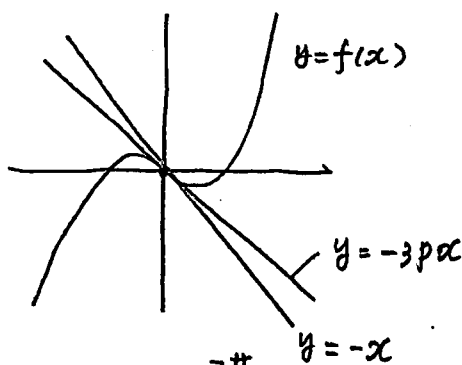
$$= px(x^2 - 1) = px(x+1)(x-1) \quad \text{で } p > 0 \text{ より下図}$$



$-3p < \boxed{-1}$ のとき

つまり $p > \frac{1}{3}$ のとき

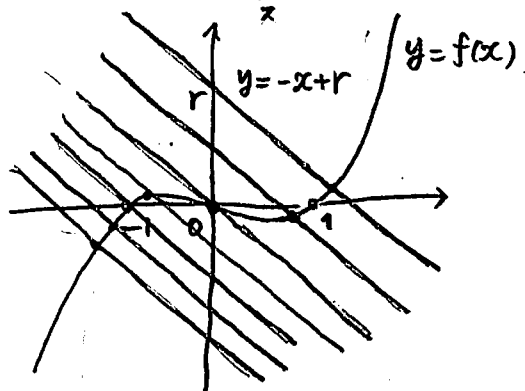
共有点 $\boxed{3}$ 個



$-3p \geq \boxed{-1}$ のとき

つまり $p \leq \frac{1}{3}$ のとき

共有点 $\boxed{1}$ 個



$y = f(x)$ と $y = -x + c$ の共有点が r によらず

$\boxed{1}$ 個となるのは 常に $f'(x) \geq -1$ となるときであるから

すなわち $3px^2 - 3p \geq -1$ がすべての実数 x でなりたつときである

$$\text{よって } 3px^2 \geq 3p - 1 \text{ より}$$

左辺は 0 以上なので $3p - 1 \leq 0$ であれば常になりたつ

$$\text{ゆえに } 0 < p \leq \boxed{\frac{1}{3}} \text{ となる}$$

(3) $p > \frac{1}{3}$ のとき

$(s, f(s))$ における接線の傾きが -1 となるのは

$$3p(s^2-1) = -1 \text{ より}$$

$$s^2-1 = \frac{-1}{3p}$$

$$s^2 = 1 - \frac{1}{3p} = \frac{3p-1}{3p}$$

$$\text{よって } s = \pm \sqrt{\frac{3p-1}{3p}} \text{ のときがある}$$

よって 傾き -1 の接線は 2 本あり

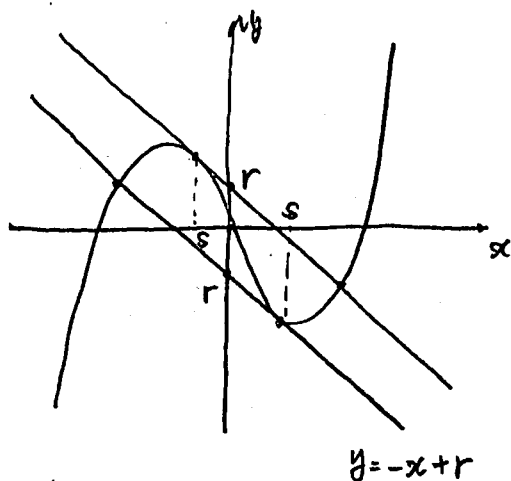
l がこのどちらかに一致するとき

C と l の共有点は $\boxed{2}$ 個 となる

この 2 本の接線と y 軸との交点の y 座標は

①より $-2ps^3$ だから

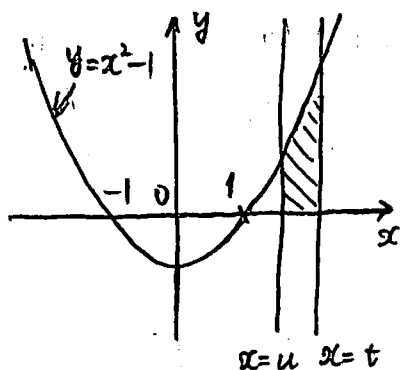
$$-2p\left(\frac{3p-1}{3p}\right)^{\frac{3}{2}} < r < 2p\left(\frac{3p-1}{3p}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ のとき共有点が 3 個になる}$$



$$\text{よって } |r| < 2p\left(\frac{3p-1}{3p}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ より}$$

$$|r| < 2p \cdot \frac{3p-1}{3p} \sqrt{\frac{3p-1}{3p}}$$

$$\text{ゆえに } |r| < \frac{\boxed{6p-2}}{\boxed{3}} \sqrt{\frac{3p-1}{3p}} \text{ となる}$$



$$(4) \int_u^1 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_u^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{u^3}{3} - 1 + u \text{ であり、これが } f(t) \text{ と等しいから}$$

$$f(t) = pt^3 - 3pt = \frac{t^3}{3} - t - \frac{u^3}{3} + u \text{ より}$$

$$p = \frac{1}{3}, -3p = -1, 0 = -\frac{u^3}{3} + u \text{ であるから}$$

$$p = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ とき } u^3 - 3u = 0 \text{ より}$$

$$u(u^2-3) = 0$$

$$u \geq 1 \text{ より } u = \boxed{\sqrt{3}} \text{ である}$$

解答記号	正解	配点
ア	0	1
イウ	-3	2
エ, オ, カ	3, 3, 2	3
キ	0	2
クケ	-3	1
コサ	-1	2
シ	1	1
ス	3	1
セ	1	2
ソ タ	$\frac{1}{3}$	2
チ, ツ, テ	3, 1, 3	3
ト	2	1
ナ, ニ, ヌ	6, 2, 3	3
ネ ノ	$\frac{1}{3}$	3
$\sqrt{8}$	$\sqrt{3}$	3

$$a_1 = -5, \quad n a_{n+1} = (n+2) a_n + 4(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (*)$$

$$(1) \quad b_n = \frac{a_n}{n(n+1)} \quad \text{とおくと} \quad b_1 = \frac{a_1}{1 \times 2} = \frac{-5}{2} \quad \text{また} \quad a_n = n(n+1) b_n \quad \text{より}$$

$$(*) \text{ は} \quad n \times (n+1)(n+2) b_{n+1} = n(n+1)(n+2) b_n + 4(n+1)$$

両辺 $n(n+1)(n+2)$ でわって

$$b_{n+1} = b_n + \frac{4}{n(n+2)}$$

ここですべての自然数 k で

$$\frac{4}{k(k+2)} = 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \quad \text{が成り立つから}$$

2以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n-1} 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right)$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \times \frac{3n(n+1) - 2(n+1) - 2n}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{3n^2 - n - 2}{n(n+1)}$$

$$\text{よって} \quad n \geq 2 \text{ で} \quad b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{k(k+2)}$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{3n^2 - n - 2}{n(n+1)}$$

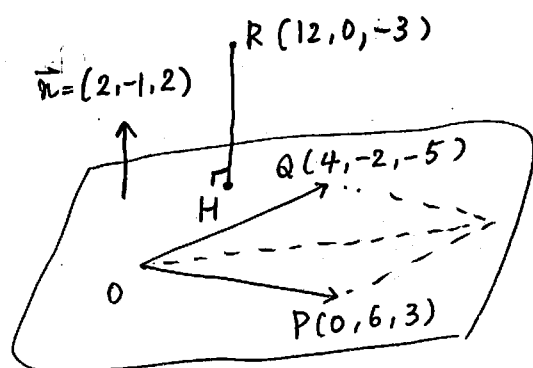
$$= \frac{-5n(n+1) + 2(3n^2 - n - 2)}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 - 7n - 4}{2n(n+1)}$$

$$\left(n=1 \text{ で} \quad \frac{1-7-4}{2 \times 1 \times 2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \right)$$

よって $n=1$ でも成り立つ

$$\text{ゆえに} \quad a_n = n(n+1) b_n = \frac{n^2 - 7n - 4}{2}$$



$$(1) |\vec{OP}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}}$$

$$|\vec{OQ}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{45} = \boxed{3\sqrt{5}} \quad \text{だから}$$

$$\vec{OA} = t(\vec{OP} + \vec{OQ}) \text{ とおけるから}$$

$$\vec{OA} = t((0, 6, 3) + (4, -2, -5))$$

$$= t(4, 4, -2)$$

$$= 2t(2, 2, -1)$$

$$|\vec{OA}| = 9 \text{ より } |2t| \sqrt{4+4+1} = 9 \text{ から}$$

$$|2t| \times 3 = 9$$

$$|2t| = 3$$

$$A \text{ の } x \text{ 座標は正より } t > 0 \text{ だから } t = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } \vec{OA} = 3(2, 2, -1) = (\boxed{6}, \boxed{6}, \boxed{-3})$$

オ カ キ

$$(2) \vec{n} = (2, p, q) \text{ とすると } \vec{OP} \cdot \vec{n} = 0 \text{ より } 2 \times 0 + p \times 6 + q \times 3 = 0 \text{ から}$$

$$q = -2p \quad \text{--- ①}$$

$$\text{また } \vec{OQ} \cdot \vec{n} = 0 \text{ より } 2 \times 4 + p \times (-2) + q \times (-5) = 0 \text{ から}$$

$$8 - 2p - 5q = 0 \quad \text{--- ②}$$

①を代入して

$$8 - 2p + 10p = 0$$

$$8 + 8p = 0$$

$$\text{よって } p = -1$$

$$\text{このとき } q = -2 \times (-1) = 2$$

$$\text{よって } \vec{n} = (2, \boxed{-1}, \boxed{2})$$

$$\left(\begin{aligned} \vec{OP} \times \vec{OQ} &= (-2 \times 3 - (-5) \times 6, -(4 \times 3 + 5 \times 0), 4 \times 6 + 2 \times 0) \\ &= (24, -12, 24) \\ &= 12(2, -1, 2) \text{ から求められる} \end{aligned} \right)$$

$$\vec{HR} = k\vec{n} \text{ とおくと } \vec{OH} = \vec{OR} + \vec{RH} = \vec{OR} - k\vec{n}$$

$$= (12, 0, -3) - k(2, -1, 2)$$

$$= (12 - 2k, k, -3 - 2k) \text{ であり}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{n} = \boxed{0} \text{ だから } (12 - 2k, k, -3 - 2k) \cdot (2, -1, 2) = 0 \text{ より}$$

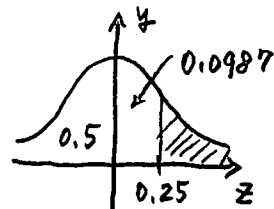
$$2(12 - 2k) - k + 2(-3 - 2k) = 0 \text{ から}$$

$$-9k + 18 = 0$$

$$\text{よって } k = \boxed{2}$$

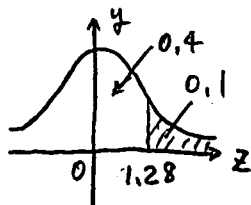
(1) $Z = \frac{X - \overset{P1}{95}}{\underset{72}{20}}$ は標準正規分布に従うので

$$\begin{aligned} P(X \geq 100) &= P\left(\frac{X-95}{20} \geq \frac{100-95}{20}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{5}{20}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) = P(Z \geq \overset{\text{オカキ}}{0.25}) \\ &= 1 - 0.5 - 0.0987 \\ &= 0.4013 \end{aligned}$$



よって合格率は $\overset{77}{40}\%$ である

また点数が上位10%に入るとき



$P(Z=1.28) = 0.4$ をつかうと

$$Z = \frac{X-95}{20} \text{ より } X = 20Z + 95 \text{ だから}$$

$$\begin{aligned} P(Z=1.28) &= P(20Z + 95 = 20 \times 1.28 + 95) \\ &= P(X = 120.6) \end{aligned}$$

よって上位10%以内に入る受験者の最低点は $\boxed{121 \text{ 点}}$
 $\square$ は ①

(2) Yの分布を二項分布とみなすと, Yは $B(19, 0.1)$ に従うから

$$Y \text{ の期待値は } 19 \times 0.1 = \boxed{1.9}$$

$$\text{分散は } 19 \times 0.1 \times 0.9 = \overset{\text{サシ}}{\underset{\text{スセリ}}{\boxed{1.71}}} \text{ である.}$$

$Y=1, 2$ となる確率をそれぞれ p_1, p_2 とすると

$$p_1 = {}^{19}C_1 \times 0.1 \times 0.9^{18}$$

$$p_2 = {}^{19}C_2 \times 0.1^2 \times 0.9^{17} \text{ であるから}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\cancel{19} \times 0.1 \times 0.9^{18}}{\frac{\cancel{19} \cdot 18}{2} \times 0.1^2 \times 0.9^{17}} = \frac{1 \times 1 \times 0.9}{9 \times 0.1 \times 1} = \frac{0.9}{0.9} = \overset{9}{\boxed{1}} \text{ ②}$$

(3) 母標準偏差 20, 標本の大きさ 96 のとき

$$1.96 \times \frac{20}{\sqrt{96}} = 1.96 \times \frac{20}{4\sqrt{6}}$$

$$= 1.96 \times \frac{5}{2.45}$$

$$= 1.96 \times \frac{1}{0.49} = 4 \text{ だから}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 96} \\ 2 \overline{) 32} \\ 4 \overline{) 16} \\ 4 \end{array}$$

m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$99 - 4 \leq m \leq 99 + 4 \text{ より}$$

$$\boxed{95} \leq m \leq \boxed{103}$$

チツ テトナ

この信頼区間の幅は $\boxed{8}$ である
=

また母標準偏差が 15 のとき

$$1.96 \times \frac{15}{\sqrt{96}} = 1.96 \times \frac{15}{4\sqrt{6}}$$

$$= 0.49 \times \frac{15^3}{2.45} = 3 \text{ だから}$$

0.49

95% 信頼区間の幅は $\boxed{6}$ となる
又

解答記号	正解	配点
アイ	95	1
ウエ	20	1
オ.カキ	0.25	2
クケ%	40 %	2
コ	1	2
サ.シ	1.9	2
ス.セソ	1.71	2
タ	2	2
チツ	95	1
テトナ	103	1
ニ	8	2
又	6	2

20点