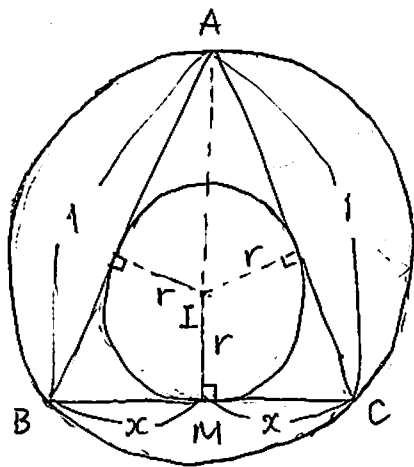




(1) 左図のように ABC を定め、BC の中点を M とおく

$$\sin B = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$$

よって 外接円の半径 R は正弦定理より

$$2R = \frac{AC}{\sin B} \quad \text{から}$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin B} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}$$

また、内心を I とすると 内接円の半径 r は

($\triangle ABC$ の面積) = ($\triangle IAB$ の面積) + ($\triangle IBC$ の面積) + ($\triangle ICA$ の面積) より

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = \frac{1}{2} \times 1 \times r + \frac{1}{2} \times 2x \times r + \frac{1}{2} \times 1 \times r \quad \text{だから}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} (1+2x+1) r$$

$$x\sqrt{1-x^2} = (x+1)r$$

$$x+1 \neq 0 \text{ より } r = \boxed{\frac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{r}{R} &= \frac{\frac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2x(1-x^2)}{x+1} = \frac{2x(1+x)(1-x)}{1+x} \\ &= 2x(1-x) \\ &= -2x^2 + 2x \\ &= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

ここで 三角形の成立条件より

$x > 0$ かつ $2x < 1+1$ かつ $1 < 1+2x$ だから

$$0 < x < 1 \quad \text{--- ②}$$

①②より $\boxed{\frac{r}{R} \text{ は } x = \frac{1}{2} \text{ のとき 最大値 } \frac{1}{2} \text{ をとる}}$

