

命題「すべての実数 x に対して、ある実数 a が不等式 $ax^2+bx+c < 0$ をみたす」
を (A) とする

また不等式 $ax^2+bx+c < 0$ を (1) とする

(A) がなりたつとすると

(i) $a=0$ のとき $ax^2+bx+c < 0$ は

$bx+c < 0$ であり

$b=0$ ならば $c < 0$ であればすべての実数 x で不等式 (1) をみたす

$b > 0$ ならば $x < -\frac{c}{b}$ となる x であれば不等式 (1) をみたす

$b < 0$ ならば $x > -\frac{c}{b}$ となる x であれば不等式 (1) をみたす

よって すべての実数 x に対して、ある実数 x で不等式 (1) をみたす
ならば $c < 0$ となる

(ii) $a < 0$ のとき

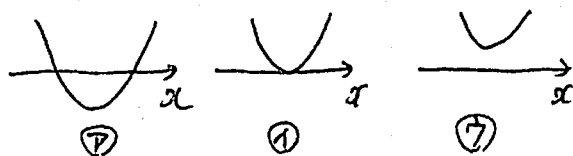


$y = ax^2+bx+c$ は上に凸の
二次関数となるので

いずれの場合も c の値にかかわらず
不等式 (1) をみたす実数 x が存在する

よって すべての実数 x に対して、ある実数 x で不等式 (1) をみたす
とき、 c は任意となる

(iii) $a > 0$ のとき



$y = ax^2+bx+c$ は下に凸の
二次関数となるので

すべての実数 x に対して
ある実数 x で不等式 (1) をみたすのは

左の (P) のグラフのときのみだから

$ax^2+bx+c = 0$ の判別式を D とすると

$D > 0$ のときだから $b^2 - 4ac > 0$ のときである

ここで b^2 は 0 以上、 a は正より

$c < 0$ であれば

すべての実数 x で、ある実数 x で不等式 (1) をみたす

(i) (ii) (iii) より 命題 (A) がなりたつとすると $a < 0$ または $c < 0$ である

逆に $a < 0$ または $c < 0$ がなりたつとする

$a < 0$ ならば、 $y = ax^2 + bx + c$ は上に凸の二次関数となるので

実数 b の値にかかわらず、ある実数 x で $ax^2 + bx + c < 0$ をみたす
解が存在する

$c < 0$ ならば $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすると

$$f(0) = c < 0 \text{ となる}$$

実数 b の値にかかわらず、 $x=0$ で $ax^2 + bx + c < 0$ をみたす。

以上のことから $a < 0$ または $c < 0$ ならば 命題① がなりたつ。

ゆえに 命題：「すべての実数 b に対して、ある実数 x が不等式 $ax^2 + bx + c < 0$
をみたす」

がなりたつための 必要十分条件は 「 $a < 0$ または $c < 0$ 」 である