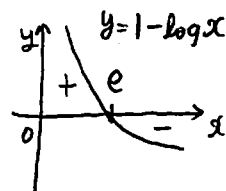


$$(1) f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \text{より} \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

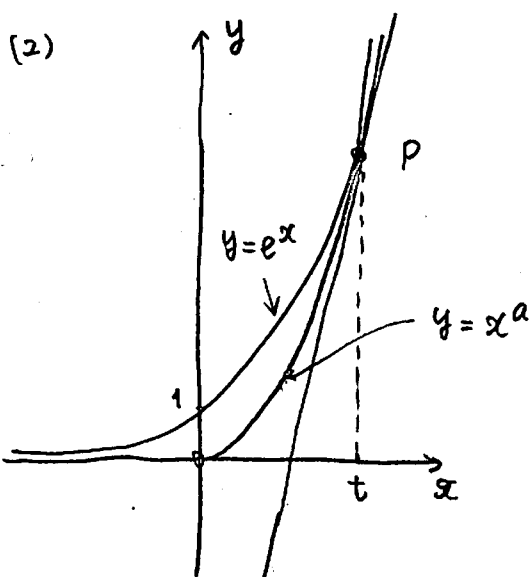
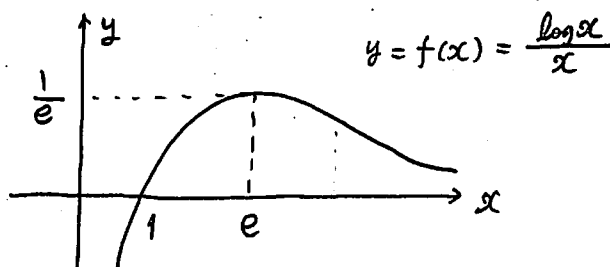


よって $f(x)$ の増減表は以下のようになる

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ 最大	↘

$$f(e) = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$$

ゆえに 最大値 $\frac{1}{e}$ ($x=e$ のとき)



$$g(x) = e^x, \quad h(x) = x^a \quad \text{とあくと}$$

$$g'(x) = e^x, \quad h'(x) = ax^{a-1} \quad \text{であり}$$

$x=t$ で 共有点 P をもち、共通接線をもつから

$$g(t) = h(t) \quad \text{かつ} \quad g'(t) = h'(t) \quad \text{であるので}$$

$$e^t = t^a - \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad e^t = at^{a-1} - \textcircled{2} \quad \text{より}$$

$$t^a = at^{a-1} \quad \text{であり}$$

$$t > 0 \quad \text{より} \quad \text{両辺} \quad t^{a-1} \quad \text{でわると}$$

$$t = a \quad \text{となる}$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して} \quad e^a = a^a \quad \text{より} \quad e = a \quad \text{となる}$$

$$\text{以上のことから} \quad \boxed{a=e, t=e} \quad \text{となる}$$

(3) $a=t=e$ とする。

(1) での $f(x)$ の最大値が $\frac{1}{e}$ であることから

$x \neq t$ かつ $x > 0$ のとき、つまり $x \neq e$ かつ $x > 0$ のとき

$$\frac{\log x}{x} < \frac{1}{e} \quad \text{がなりたつので} \quad \text{両辺に} \quad ex (> 0) \quad \text{をかけて}$$

$$e \log x < x \cdot \log e \quad \text{より}$$

$$\log x^e < \log e^x$$

底 e は 1 より大きいから

$$x^e < e^x \quad \text{がなりたつ}$$

$$\text{ゆえに} \quad \boxed{a=e \text{ のとき} \quad e^x > x^a \quad \text{がなりたつ}}$$