

・ 袋Aについて

3回目に初めて白が22個になるとき、

3回目は必ず黒がでることが必要である
はじめの2回のうち、1回だけ黒になればよいから
○○○, ○○○ の場合があるので

$$\begin{aligned} & \frac{20}{30} \times \frac{10}{30} \times \frac{9}{30} + \frac{10}{30} \times \frac{21}{30} \times \frac{9}{30} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \times (2 \times 10 \times 1 + 1 \times 21 \times 1)}{30 \times 30 \times 30} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 41}{2 \times 10 \times 30} = \boxed{\frac{41}{300}} \end{aligned}$$

・ 袋Bについて 2個とりだして

$$\text{白黒1個である確率は } \frac{{}_{20}C_1 \times {}_{10}C_1}{{}_{30}C_2} = \frac{20 \times 10}{30 \cdot 29} = \frac{20 \times 10}{45 \times 29} = \boxed{\frac{40}{87}}$$

$$\text{2個とも黒である確率は } \frac{{}_{10}C_2}{{}_{30}C_2} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}}{\frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1}} = \frac{1 \times 9}{3 \times 29} = \boxed{\frac{3}{29}}$$

・ 袋Cについて

10個とりだして黒がn個である確率を P_n とすると

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{{}_{10}C_n \times {}_{20}C_{10-n}}{{}_{30}C_{10}} = \frac{10!}{n! (10-n)!} \times \frac{20!}{(10-n)! \{20-(10-n)\}!} \times \frac{10! \times 20!}{30!} \\ &= \frac{(10! 20!)^2}{30!} \times \frac{1}{n! \{ (10-n)! \}^2 (10+n)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{P_{k+1}}{P_k} &= \frac{(10! 20!)^2}{30!} \times \frac{1}{(k+1)! \{ (10-(k+1))! \}^2 (10+k+1)!} \times \frac{30!}{(10! 20!)^2} \times \frac{k! \{ (10-k)! \}^2 (10+k)!}{1} \\ &= \frac{k! \{ (10-k)! \}^2 (10+k)!}{(k+1)! \{ (9-k)! \}^2 (11+k)!} \\ &= \boxed{\frac{(10-k)^2}{(k+1)(11+k)}} \end{aligned}$$

である

$$P_{k+1} > P_k \text{ のとき } \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \text{ より } \frac{(10-k)^2}{(k+1)(k+11)} > 1 \text{ だから}$$

$$k^2 - 20k + 100 > k^2 + 12k + 11$$

$$32k < 89$$

$$k < \frac{89}{32} = 2 + \frac{25}{32} \quad \therefore k = 0, 1, 2$$

$$P_{k+1} < P_k \text{ のとき } \frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \text{ より } k > \frac{89}{32} = 2 + \frac{25}{32} \quad \therefore k = 3, 4, 5, \dots, 9$$

ゆえに $P_0 < P_1 < P_2 > P_4 > P_5 > \dots > P_{10}$ より

P_n が最大値をとるのは $n = \boxed{3}$ である