解答記号	正解	配点
アイウ	133	2
エオ	12	3
カキク	433	3
		8点

$f(x)=3^x+3^{-x}$ に対して

$f(x-1)=3^{x-1}+3^{-(x-1)}$

$=3^x\times 3^{-1}+3^{-x}\times 3^1$

$=\boxed{\dfrac{1}{3}}\times 3^x+\boxed{3}\times 3^{-x}$　（ア／イ，ウ）

また $f(x-1)=f(x)$ をとくと

$3^x+3^{-x}=\frac{1}{3}\times 3^x+3\times 3^{-x}$ より

$\frac{2}{3}\times 3^x-2\times 3^{-x}=0$

$\frac{1}{3}\times 3^x-3^{-x}=0$

両辺 3^x かけて

$\frac{1}{3}\times(3^x)^2-1=0$

よって $3^{2x}=3$ より　$2x=1$ から　$x=\boxed{\dfrac{1}{2}}$　（エ／オ）

このときの $f(x)$ の値は

$f(\frac{1}{2})=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\boxed{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$　（カキ／ク）

$y = \log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)$ ―― ① は

$y = \log_2\left\{\frac{1}{2}(x+6)\right\}$

$= \log_2\frac{1}{2} + \log_2(x+6)$

$= \log_2 2^{-1} + \log_2(x+6)$

$= -1 + \log_2(x+6)$ より

これは

$y = \log_2 x$ ― ② を x 軸方向に $\underset{ケコ}{\boxed{-6}}$，$y$ 軸方向に $\underset{サシ}{\boxed{-1}}$

平行移動したものである

①②を連立にして

$-1 + \log_2(x+6) = \log_2 x$ ― ③ であり

真数条件より $x+6>0$ かつ $x>0$ だから

$x>-6$ かつ $x>0$ よって $x>0$ ―④

このとき③は $\log_2(x+6) = \log_2 x + 1$ より

$\log_2(x+6) = \log_2 x + \log_2 2$

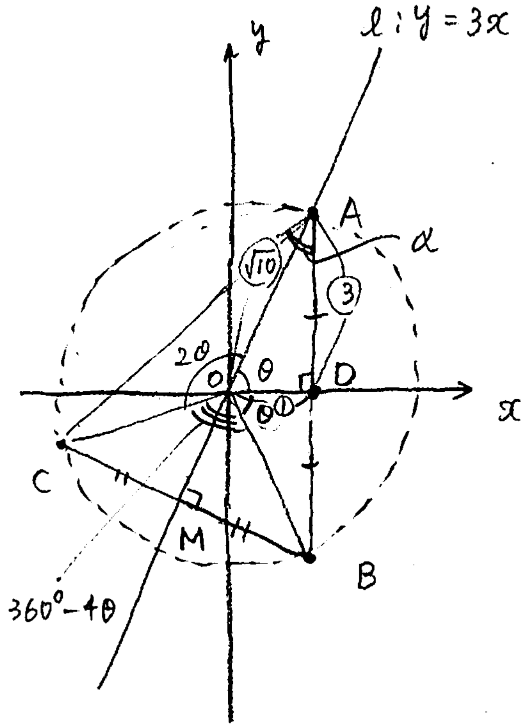
$= \log_2 2x$

よって $x+6 = 2x$ より $x = \underset{ス}{\boxed{6}}$ （これは④をみたす）

このとき $y = \log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3$

$= 1 + \log_2 \underset{セ}{\boxed{3}}$ である

解答記号	正解	配点
ケコ	−6	2
サシ	−1	2
		4点



(1)　$\angle AOD=\theta$ とすると

$\tan\theta=\boxed{3}$ ソ

$\cos\theta=\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{10}}}$ タチ

x軸は AB の垂直二等分線

l は BC の垂直二等分線だから

O は △ABC の外心となる

BC の中点を M とすると

$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ であり

$\angle AOB=\angle AOC=2\theta$ だから

$\angle COB=360^\circ-4\theta$　（中心角）

よって　$\alpha=\dfrac{1}{2}\angle COB=\boxed{180}^\circ-\boxed{2}\theta$　であり
ツテト　ナ

$\cos\alpha=\cos(180^\circ-2\theta)$

$=-\cos 2\theta=-(2\cos^2\theta-1)$

$=-2\times\dfrac{1}{10}+1=\boxed{\dfrac{4}{5}}$ ニヌ　となる　①

(2)　△OAB, △OBC の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると

$\angle BOC=\boxed{2}\alpha$　であり
ネ

（O は外心より $OA=OB=OC$）

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\times OA\times OB\times\sin 2\theta}{\frac{1}{2}\times OB\times OC\times\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{\sin(360^\circ-4\theta)}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{-\sin 4\theta}$$

$$=\frac{\sin 2\theta}{-2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

$$=\frac{1}{-2\cos 2\theta}$$

①より $-\cos 2\theta=\dfrac{4}{5}$

$$=\frac{1}{2\times\frac{4}{5}}=\boxed{\frac{5}{8}}$$ ノハ

解答記号	正解	配点
ソ	3	2
タチ	10	2
ツテトナ	1802	3
ニヌ	45	2
ネ	2	2
ノハ	58	4
		15点

$f(x)=3ax^2-(8a+6)x+4a+6$

(1)　$g(x)=3bx^2+ux+v$ であり

$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx=-6$ より

$\left[bx^3+\frac{u}{2}x^2+vx\right]_{-1}^{0}=-6$

$-b\times(-1)^3-\frac{u}{2}\times(-1)^2-v\times(-1)=-6$

$b-\frac{u}{2}+v=-6$ — ①

また　$y=g(x)$ が $(-1,-9)$ を通るので

$3b-u+v=-9$ — ②

①−② より　$-2b+\frac{1}{2}u=3$ よって

$\frac{1}{2}u=2b+3$

$u=\underbrace{\boxed{4b}}_{アイ}+\underbrace{\boxed{6}}_{ウ}$ — ③

①に代入して　$b-\frac{1}{2}(4b+6)+v=-6$ より

$b-2b-3+v=-6$

よって　$v=\underbrace{\boxed{b}}_{エ}-\underbrace{\boxed{3}}_{オ}$ — ④

さらに $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が y 軸上で共有点をもつので

$f(0)=g(0)$ より

$4a+6=v$ — ⑤

また　$f'(x)=6ax-(8a+6)$

$g'(x)=6bx+u$ であり y 軸上の共有点での接線が一致するので

$f'(0)=g'(0)$ より

$-(8a+6)=u$ — ⑥ である

③⑥より　$4b+6=-8a-6$ から

$8a+4b=-12$ — ⑦

④⑤より　$b-3=4a+6$ から

$b=4a+9$

⑦に代入して　$8a+4(4a+9)=-12$ から

$24a=-48$ よって $a=\underbrace{\boxed{-2}}_{カキ}$,　$b=4a+9=-8+9=\underbrace{\boxed{1}}_{ク}$

$a=-2,\ b=1$ より

$f(x)=-6x^2-(-16+6)x-8+6$

$=\underline{-6x^2+10x-2}$

また　$u=4b+6=10$

$v=b-3=-2$ より

$g(x)=\underline{3x^2+10x-2}$ となる.

$\begin{cases} f'(x)=-12x+10 \\ g'(x)=6x+10 \end{cases}$ であり $f'(0)=g'(0)=10$

また $f(0)=g(0)=-2$ より

求める接線は $y=\underbrace{\boxed{10}}_{ケコ}x-\underbrace{\boxed{2}}_{サ}$ である

(2) $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ のとき

$h(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=\overset{シ}{\boxed{0}}$

また $f(x)=3ax^2-(8a+6)x+4a+6$ より

$h'(x)=f(x)=3ax^2-(8a+6)x+4a+6$ だから

$h'(0)=\underbrace{\boxed{4}}_{セ}a+\underbrace{\boxed{6}}_{ソ}$,

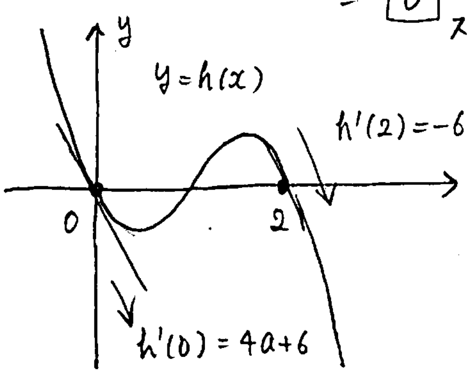
$h'(2)=12a-2(8a+6)+4a+6=\overset{タチ}{\boxed{-6}}$

また $h(x)=\int_0^x \{3at^2-(8a+6)t+4a+6\}\,dt$ より

$h(2)=\left[at^3-(4a+3)t^2+(4a+6)t\right]_0^2$

$=8a-4(4a+3)+2(4a+6)$

$=\underbrace{\boxed{0}}_{ス}$ となる



$y=h(x)$ は3次関数で

$f(0)=f(2)=0$

$f'(2)=-6<0$ より

$0\leqq x\leqq 2$ で $h(x)$ が正の値も負の値も

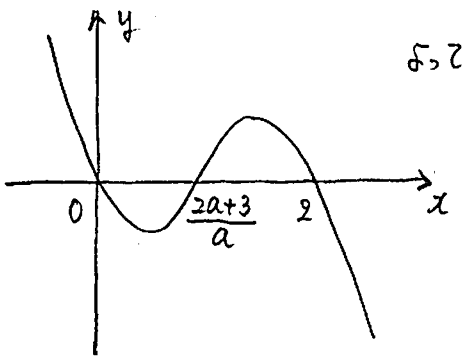
とるとき. $h'(0)=4a+6<0$ であればよいから

$a<\boxed{\dfrac{-3}{2}}$ ツテ ト のときである

(2) 別解

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$
$$=\int_0^x \{3at^2-(8a+6)t+4a+6\}\,dt$$
$$=\left[at^3-(4a+3)t^2+(4a+6)t\right]_0^x$$
$$=ax^3-(4a+3)x^2+(4a+6)x$$
$$=x\{ax^2-(4a+3)x+(4a+6)\}$$
$$=x(x-2)\{ax-(2a+3)\}$$

$\left(\begin{matrix}1 & -2\\ a & -(2a+3)\end{matrix}\right)$



よって　$0\leqq x\leqq 2$ で　$f(x)$ が正の値も負の値ももつ条件は

$$0<\frac{2a+3}{a}<2$$

すべての辺に　$a^2\ (>0)$ をかけて

$$0<a(2a+3)<2a^2$$

$a(2a+3)>0$ より

$a<-\frac{3}{2},\ 0<a$ —⑧

$a(2a+3)<2a^2$ より

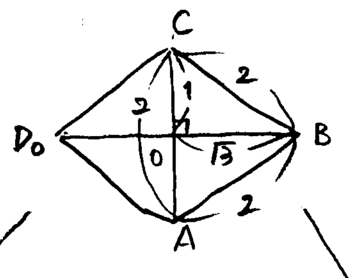
$2a^2+3a<2a^2$

$a<0$ —⑨

⑧かつ⑨より　$a<\boxed{-\frac{3}{2}}$ (ツテ/ト)

解答記号	正解	配点
アイウ	486	3
エオ	83	3
カキ	−2	2
ク	1	2
ケコ	10	3
サ	2	3
シ	0	1
ス	0	4
セ	4	1
ソ	6	1
タチ	−6	3
ツテト	−32	4

30点

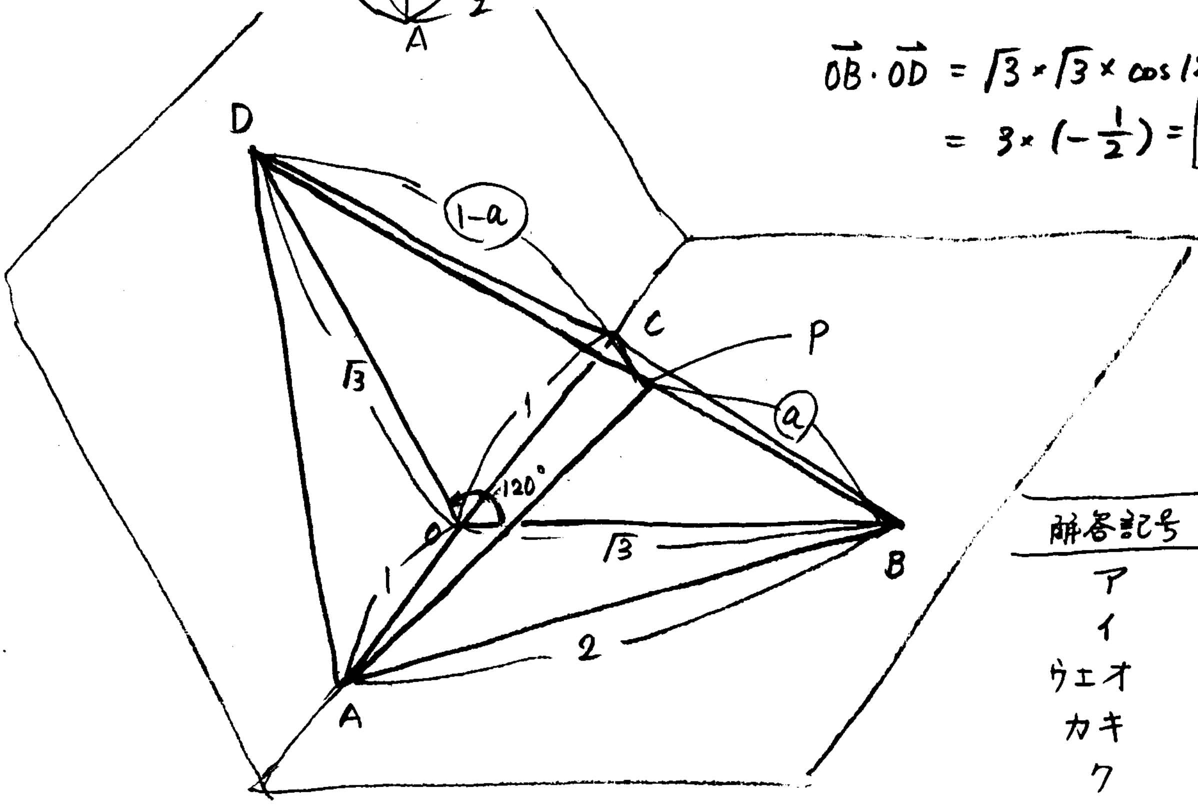


$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{0}$ ア

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} = \boxed{0}$ イ

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos 120^\circ$

$= 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{-3}{2}}$ ウエ オ



解答記号	正解	配点
ア	0	1
イ	0	1
ウエオ	−3 2	2
カキ	1 a	2
ク	a	1
ケコ	a 1	2
サ	a	1
シス	a 1	2
セ	a	1
ソタチ	9 9 2	5
ツテトナ	1323 or 2313	2 (各1)

20点

$\overrightarrow{OP} = (\boxed{1}-\boxed{a})\overrightarrow{OB} + \boxed{a}\overrightarrow{OD}$ （カ キ ク）

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}$

$= -\overrightarrow{OC} + (\boxed{a}-\boxed{1})\overrightarrow{OB} - \boxed{a}\overrightarrow{OD}$ （ケ コ サ）

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$

$= \overrightarrow{OC} + (\boxed{a}-\boxed{1})\overrightarrow{OB} - \boxed{a}\overrightarrow{OD}$ （シ ス セ）

したがって $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = \{(a-1)\overrightarrow{OB} - a\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\}\cdot\{(a-1)\overrightarrow{OB} - a\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\}$

$= (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC})$

$= |\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2$

$= |(1-a)\overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OD}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2$

$= (1-a)^2|\overrightarrow{OB}|^2 + 2a(1-a)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} + a^2|\overrightarrow{OD}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2$

$= (1-a)^2\times 3 + 2a(1-a)\times\left(-\frac{3}{2}\right) + a^2\times 3 - 1$

$= (3a^2-6a+3) - 3a(1-a) + 3a^2 - 1$

$= \boxed{9}a^2 - \boxed{9}a + \boxed{2}$ （ソ タ チ）

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$9a^2-9a+2=0$ をとくと

$(3a-1)(3a-2)=0$

よって $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PC}$ のとき $a = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}, \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ （ツ テ ト ナ）