

問題番号 (配点)	解答記号	正 解	配点	チェック
第1問 (30)	$\text{ア}X + \frac{\text{イ}}{X} + \text{ウ}$	$9X + \frac{4}{X} + 13$	2	
	オカ	25	3	
	キク	-2	3	
	ケ, $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$4, \frac{1}{9}$	3	
	$\frac{\text{シ}}{\log_3 3 - \text{ス}}$	$\frac{2}{\log_3 3 - 1}$	2	
	$\frac{\text{セソ} \log_3 3}{\log_3 3 - \text{ス}}$	$\frac{-2 \log_3 3}{\log_3 3 - 1}$	2	
	$\frac{\text{タ} + \cos \theta}{\text{チ}}$	$\frac{1 + \cos \theta}{2}$	2	
	$\text{a} + \text{ツb} + \text{テト} \cos \alpha + \text{ナ} \cos \beta$	$\text{a} + 2\text{b} + 2\text{b} \cos \alpha + \text{a} \cos \beta$	3	
	$\frac{(\text{ニa} + \text{b})^2}{\text{ネa}^2 \text{b}}$	$\frac{(2\text{a} + \text{b})^2}{4\text{a}^2 \text{b}}$	4	
	$\frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$	$\frac{1}{3}$	3	
第2問 (30)	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{1}{2}$	3	
	$\text{ウx} + \text{エty} = \text{t}^3$	$2x + 2ty = \text{t}^3$	3	
	$\text{t}^3 - \text{カkt} - \text{キ}$	$\text{t}^3 - 2\text{kt} - 2$	2	
	$\frac{\sqrt{\text{クk}}}{\text{ケ}}$	$\frac{\sqrt{6k}}{3}$	3	
	$\frac{\text{コ}\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}} \text{k}\sqrt{\text{k}} - \text{ス}$	$\frac{4\sqrt{6}}{9} \text{k}\sqrt{\text{k}} - 2$	4	
	$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\frac{3}{2}$	3	
	タ, チ	1, 3	3	
	ツテ	-1	2	
	ト	2	1	
	ナ	3	1	
	ニヌ	-3	1	
	ネノ	12	4	

問題番号 (配点)	解答記号	正 解	配点	チェック
第3問 (20)	$\frac{(\text{アイ})^{n-1} + \text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{(-2)^{n-1} + 8}{3}$	3	
	$\frac{-(\text{オカ})^n + \text{キク}_n + \text{ケ}}{\text{コ}}$	$\frac{-(-2)^n + 24n + 1}{9}$	3	
	サ	4	2	
	シ	9	2	
	ス	2	2	
	セソ	-1	2	
	$\frac{\text{タ}^n + \text{チツ}}{\text{テ}}$	$\frac{2^n + 19}{3}$	3	
	$\frac{\text{ト}^n + \text{ナニ}}{\text{ヌ}}$	$\frac{2^n + 11}{3}$	3	
第4問 (20)	$\text{ア}\vec{q}$	$\vec{a}\vec{q}$	1	
	$-\text{イ}\vec{p} + \text{ウ}\vec{q}$	$-b\vec{p} + b\vec{q}$	1	
	$-\text{I}\vec{p} + (\text{オ} + \text{カ})\vec{q}$	$-2\vec{p} + (\text{a} + 1)\vec{q}$ または $-2\vec{p} + (1 + \text{a})\vec{q}$	2	
	$\text{キ}\vec{p} + (\text{ク} - \text{ケ})\vec{q}$	$b\vec{p} + (1 - b)\vec{q}$	2	
	$\frac{1}{\text{コ}}(\text{サa} - \text{シb} - \text{ab})$	$\frac{1}{2}(2\text{a} - 3\text{b} - \text{ab})$	2	
	$\frac{\text{スa}}{\text{a} + \text{セ}}$	$\frac{2\text{a}}{\text{a} + 3}$	2	
	$\frac{\sqrt{\text{ソタ}}}{\text{チ}}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	2	
	$\frac{\sqrt{\text{ツテ}}}{\text{ト}}$	$\frac{\sqrt{39}}{7}$	2	
	$\frac{\text{ナニ}\sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネノ}}$	$\frac{13\sqrt{3}}{28}$	2	
	$\frac{1}{\text{ハヒ}}(-\text{フ}\vec{p} + \text{ヘ}\vec{q})$	$\frac{1}{26}(-6\vec{p} + 11\vec{q})$	4	

自己採点欄

100点

$$(1) \quad (2^x + 3^x) \left(\frac{9}{2^x} + \frac{4}{3^x} \right) = a \quad \text{--- ① より}$$

$$9 + 4 + 9 \times \left(\frac{3}{2} \right)^x + 4 \left(\frac{2}{3} \right)^x = a$$

$$X = \left(\frac{3}{2} \right)^x \text{ より}$$

$$13 + 9X + 4 \times \frac{1}{X} = a$$

$$\text{よって } \boxed{9}X + \frac{\boxed{4}}{X} + \boxed{13} = a \quad \text{--- ②}$$

②より $9X > 0, \frac{4}{X} > 0$ より 相加相乗平均の関係から

$$9X + \frac{4}{X} \geq 2 \sqrt{9X \cdot \frac{4}{X}} = 2\sqrt{36} = 12$$

$$(\text{等号は } 9X = \frac{4}{X} \text{ より } X^2 = \frac{4}{9} \text{ より } X = \frac{2}{3})$$

$$\text{ゆえに ②は } 9X + \frac{4}{X} = a - 13 \geq 12 \text{ より}$$

$$a \geq 25.$$

等号のとき重解をもつので $a > \boxed{25}$ のとき異なる2つの実数解をもつ

このときの2つの解を $X = \alpha, \beta$ とすると

$$X\alpha = \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha, X\beta = \left(\frac{3}{2} \right)^\beta \text{ を解にもつ}$$

$$\text{よって 両辺対数をとって } \log_{\frac{3}{2}} X\alpha = \alpha, \log_{\frac{3}{2}} X\beta = \beta \text{ となる}$$

$$\text{また ②は } 9X^2 + (13-a)X + 4 = 0 \quad \text{--- ③ であり}$$

これが異なる2つの解 $X\alpha, X\beta$ をもつ

$$\text{以上から ①の解の和 } \alpha + \beta \text{ は } \alpha + \beta = \log_{\frac{3}{2}} X\alpha + \log_{\frac{3}{2}} X\beta$$

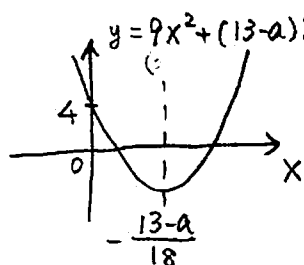
$$= \log_{\frac{3}{2}} (X\alpha X\beta)$$

$$= \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{9} \right) \quad (\text{③の解と係数の関係より})$$

$$= \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{-2}$$

$$= \boxed{-2} \text{ となる}$$

$a > \boxed{25}$ の81解 ③式が異なる2つの 正の実数解 をもてばよいから
($X = \left(\frac{3}{2} \right)^x > 0$ より)



$$X=0 \text{ のとき } y=4 > 0$$

$$(\text{軸}) > 0 \text{ より } -\frac{13-a}{18} > 0 \text{ から } a > 13 \quad \text{--- ⑤} \quad \text{④⑤より } a > 25$$

(2) $a=50$ のとき、②は

$$9X + \frac{4}{X} + 13 = 50 \text{ より}$$

$$9X^2 - 37X + 4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -4 \\ 9 & -1 \end{array} \right)$$

$$(X-4)(9X-1)=0$$

$$\text{よって } X = \boxed{4}, \boxed{\frac{1}{9}} \text{ となるから}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 4, \frac{1}{9} \text{ である}$$

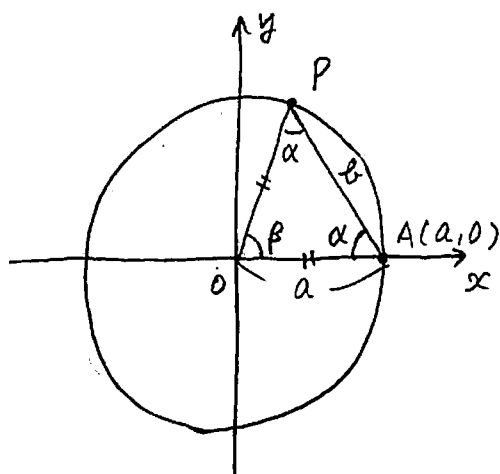
両辺底が2である対数をとると

$$\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)^x = \log_2 4, \log_2 \frac{1}{9} \text{ より}$$

$$x(\log_2 3 - \log_2 2) = 2, \log_2 3^{-2}$$

$$\text{よって } x = \frac{\boxed{2}}{\log_2 3 - \boxed{1}} = \frac{\boxed{-2} \log_2 3}{\log_2 3 - 1} \text{ となる}$$

解答記号	正解	配点
アイウエ	9413	2
オカ	25	3
キク	-2	3
ケコサ	419	3
シス	21	2
セソ	-2	2
		15点



$$L = \frac{a}{b} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b} \cos^2 \frac{\beta}{2}$$

$$(1) \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{a}{b} \times \frac{1 + \cos \alpha}{2} + \frac{1}{b} \times \frac{1 + \cos \beta}{2} \\ &= \frac{1}{2ab} (2b + 2b \cos \alpha + a + a \cos \beta) \\ &= \frac{1}{2ab} (a + \boxed{2}b + \boxed{2b} \cos \alpha + \boxed{a} \cos \beta) \end{aligned}$$

ここで $\triangle OAP$ は $OA = OP$ の二等辺三角形だから

$$\angle OAP = \angle OPA = \alpha \quad \text{より} \quad 2\alpha + \beta = \pi$$

$$\text{よって} \quad \beta = \pi - 2\alpha \quad \text{より}$$

$$\cos \beta = \cos (\pi - 2\alpha)$$

$$= -\cos 2\alpha$$

$$= -(2\cos^2 \alpha - 1)$$

$$= -2\cos^2 \alpha + 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} L &= \frac{1}{2ab} \left\{ a + 2b + 2b \cos \alpha + a(-2\cos^2 \alpha + 1) \right\} \\ &= \frac{1}{2ab} (2a + 2b + 2b \cos \alpha - 2a \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{ab} (a - a \cos^2 \alpha + b + b \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{ab} \left\{ a(1 - \cos^2 \alpha) + b(1 + \cos \alpha) \right\} \\ &= \frac{1}{ab} (1 + \cos \alpha) \left\{ a(1 - \cos \alpha) + b \right\} \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}AP}{OA} = \frac{\frac{1}{2}b}{a} = \frac{b}{2a} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{ab} \left(1 + \frac{b}{2a} \right) \left\{ a \left(1 - \frac{b}{2a} \right) + b \right\} \\ &= \frac{1}{ab} \times \frac{2a+b}{2a} \times \left\{ a \times \frac{2a-b}{2a} + \frac{2b}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{ab} \times \frac{2a+b}{2a} \times \frac{2a-b+2b}{2} \\ &= \frac{(\boxed{2}a+b)\boxed{2}}{\boxed{4}a\boxed{2}b} \quad \text{と表す} \end{aligned}$$

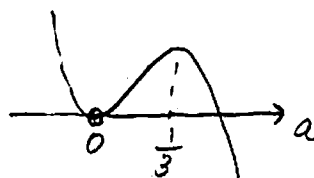
(2) $2a+b=1$ のとき、 $b=1-2a$ であるから

$$L = \frac{1}{4a^2b} = \frac{1}{4a^2(1-2a)}$$

$$f(a) = 4a^2 - 8a^3 \text{ とおく}$$

$$f'(a) = -24a^2 + 8a$$

$$= -24a\left(a - \frac{1}{3}\right)$$



$a > 0$ より $a = \frac{1}{3}$ において $f(a)$ は最大値をとり、

このとき L は最小値となり、その値は

$$L = \frac{1}{4 \times \frac{1}{9} \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{9} \times \frac{1}{3}} = \frac{27}{4} \text{ である}$$

解答記号	正解	配点
㍻	12	2
㍷	22b	3
㍷	2242	4
ハ	13	3
フ	274	3
15点		

11) $C: y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ のとき $y' = x$ だから $(t, \frac{1}{2}t^2 - 1)$ での接線 ℓ は

$$y = t(x - t) + \frac{1}{2}t^2 - 1 \text{ より}$$

$$y = tx - \frac{1}{2}t^2 - 1$$

また $(t, \frac{1}{2}t^2 - 1)$ での法線 m は

$$y = -\frac{1}{t}(x - t) + \frac{1}{2}t^2 - 1 \text{ より}$$

$$y = -\frac{1}{t}x + 1 + \frac{1}{2}t^2 - 1$$

$$2ty = -2x + t^3.$$

$$\text{よって } m \text{ は } \boxed{2}x + \boxed{2}ty = t^3$$

m が $P(1, k)$ を通るとき

$$2 \times 1 + 2tk = t^3 \text{ より}$$

$$t^3 - \boxed{2}kt - \boxed{2} = 0 \text{ である}$$

この左辺を $f(t)$ とすると

$$f(t) = t^3 - 2kt - 2 \text{ より}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 2k$$

$$= 3\left(t^2 - \frac{2k}{3}\right)$$

$$= 3\left(t + \sqrt{\frac{2k}{3}}\right)\left(t - \sqrt{\frac{2k}{3}}\right)$$

$$= 3\left(t + \sqrt{\frac{6k}{3}}\right)\left(t - \sqrt{\frac{6k}{3}}\right)$$

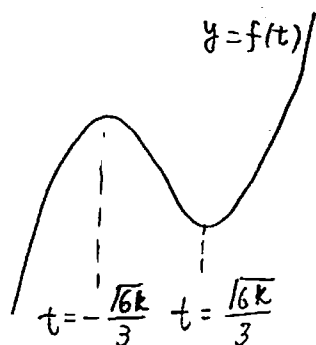
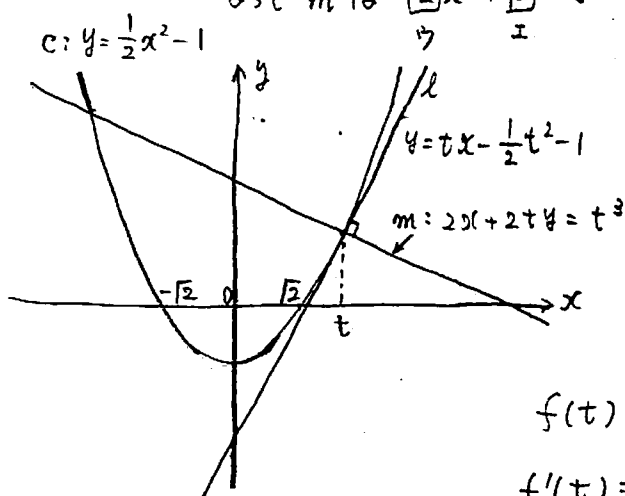
$$t = -\frac{\sqrt{6k}}{3} \text{ で 極大値をとり、その値は}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6k}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{6k} \cdot k \sqrt{k}}{2 \cdot 9} - 2k \times \left(-\frac{\sqrt{6k}}{3}\right) - 2$$

$$= -\frac{2\sqrt{6}k\sqrt{k}}{9} + \frac{6\sqrt{6}k\sqrt{k}}{9} - 2$$

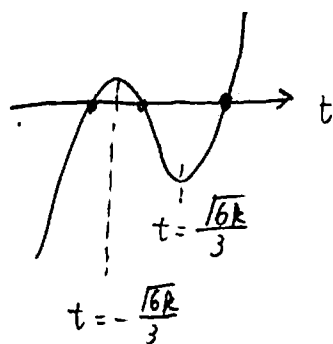
$$= \frac{\boxed{4\sqrt{6}}}{9} k\sqrt{k} - \boxed{2}$$

$$\text{また } t = \frac{\sqrt{6k}}{3} \text{ のとき 極小値 } -\frac{4\sqrt{6}}{9} k\sqrt{k} - 2 \text{ とする}$$



極小値は明らかに負であることから

(i) (極大値) > 0 のとき、 $f(t) = 0$ の実数解 t は 3 個より



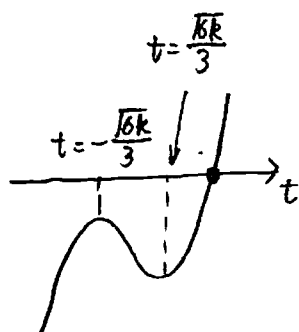
$$\frac{4\sqrt{6}}{9} k\sqrt{k} - 2 > 0 \text{ より}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} k\sqrt{k} > 1$$

$$k\sqrt{k} > \frac{9}{-2\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{よって } k^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ より } k > \frac{3}{2}$$

$$\text{ゆえに } \boxed{\frac{3}{2}} < k \text{ のとき } \boxed{3} \text{ 個}$$



(ii) (極大値) < 0 のとき、 $f(t) = 0$ の実数解 t は 1 個より

$$\frac{4\sqrt{6}}{9} k\sqrt{k} - 2 < 0 \text{ より}$$

$$0 < k < \boxed{\frac{3}{2}} \text{ のとき } \boxed{1} \text{ 個}$$

(2) $k = \frac{3}{2}$ のとき $f(t) = 0$ は $t^3 - 2 \times \frac{3}{2} t - 2 = 0$ より

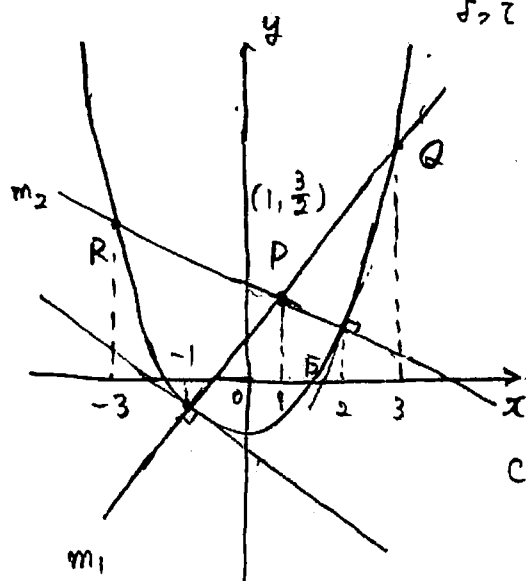
$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t^2 - t - 2) = 0$$

$$(t+1)^2(t-2) = 0$$

$$\text{よって } t = \boxed{-1}, \boxed{2} \text{ である}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$



$$m \text{ は } 2x + 2ty = t^3 \text{ より}$$

$$t = -1 \text{ のとき } m_1 \text{ は } 2x - 2y = -1 \text{ より}$$

$$m_1: y = x + \frac{1}{2}$$

$$t = 2 \text{ のとき } m_2 \text{ は } 2x + 4y = 8 \text{ より}$$

$$m_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$C: y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \text{ と } m_1 \text{ と連立して}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 = x + \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$x^2 - 2 = 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\text{よって } Q \text{ の } x \text{ 座標は } \boxed{3}$$

また $C: y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ と m_2 を連立にすると

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ より}$$

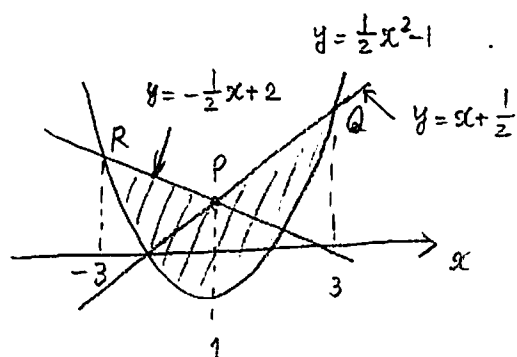
$$x^2 - 2 = -x + 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

よって R の x 座標は $\boxed{-3}$
 $= x$

$P(1, \frac{3}{2})$ は m_1 上にも m_2 上にもあるのだから P は m_1, m_2 の交点である



よって PQ, PR および C で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 \left\{ (-\frac{1}{2}x + 2) - (\frac{1}{2}x^2 - 1) \right\} dx \\ &\quad + \int_1^3 \left\{ (x + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}x^2 - 1) \right\} dx \\ &= \int_{-3}^1 (-\frac{1}{2}x + 3) dx + \int_1^3 (x + \frac{3}{2}) dx - \int_{-3}^3 \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-3}^1 + \left[\frac{1}{2}(x + \frac{3}{2})^2 \right]_1^3 - 2 \int_0^3 \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= -\frac{1}{4}(1-9) + 3(1+3) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \\ &= 2 + 12 + \frac{1}{2}\left(\frac{81}{4} - \frac{25}{4}\right) - 9 \\ &= 5 + \frac{1}{2} \times \frac{56}{4} \text{ ネ、} \\ &= 5 + 7 = \boxed{12} \end{aligned}$$

解答記号	正解	配点
アイ	12	3
ウエオ	223	3
カキ	22	2
クケ	63	3
コサシス	4692	4
セリ	32	3
タチ	13	3
ツテ	-1	2
ト	2	1
ナ	3	1
ニヌ	-3	1
ネノ	12	4

30点、

$$(1) a_1 = 3, a_{n+1} = -2a_n + 8 \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{cases} C = -2C + 8 \\ 3C = 8 \\ C = \frac{8}{3} \end{cases}$$

①の両辺から $\frac{8}{3}$ を引く

$$a_{n+1} - \frac{8}{3} = -2 \left(a_n - \frac{8}{3} \right) \quad \text{より}$$

$$\left\{ a_n - \frac{8}{3} \right\} \text{ は初項 } a_1 - \frac{8}{3} = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

公比 -2 の等比数列だから

$$a_n - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \times (-2)^{n-1}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{\overset{\text{74}}{(-2)^{n-1}} + \overset{\text{75}}{8}}{\underset{\text{76}}{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{(-2)^{k-1} + 8}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1 \times \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} + 8n \right\} \\ &= \frac{1 - (-2)^n + 24n}{3} \\ &= \frac{\overset{\text{77}}{-(-2)^n} + \overset{\text{78}}{24}n + \overset{\text{79}}{1}}{\underset{\text{80}}{3}} \quad \text{である} \end{aligned}$$

$$(2) a_n = \frac{(-2)^{n-1} + 8}{3} \quad \text{である} \quad a_n = 0 \text{ となる } (-2)^{n-1} + 8 = 0 \text{ より}$$

$$(-2)^{n-1} = (-2)^3$$

$$\text{よって } n-1 = 3 \text{ より } n = \boxed{4}$$

$$a_1 = \frac{1+8}{3} = \frac{9}{3}, \quad a_2 = \frac{-2+8}{3} = \frac{6}{3}, \quad a_3 = \frac{4+8}{3} = \frac{12}{3}, \quad a_4 = \frac{-8+8}{3} = 0 \text{ より}$$

$$T_4 = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 3 + 2 + 4 + 0 = \boxed{9} \quad \text{である}$$

$$n > 4 \text{ のとき } n \text{ が奇数なら } |a_n| = a_n = \frac{(-2)^{n-1} + 8}{3} = \frac{2^{n-1} + 8}{3}$$

$$(n \text{ が奇数なので } (-2)^{n-1} = 2^{n-1})$$

$$n \text{ が偶数なら } |a_n| = -a_n = \frac{-(-2)^{n-1} - 8}{3} = \frac{2^{n-1} - 8}{3}$$

$$(n \text{ が偶数なので } -(-2)^{n-1} = 2^{n-1})$$

$$\text{よって } |a_n| = \frac{\overset{\text{81}}{2}^{n-1} + 8 \times \overset{\text{82}}{(-1)}^{n-1}}{\underset{\text{83}}{3}} \quad \text{となる}$$

以上のことから $T_4 = 9$.

$$n > 4 \text{ のとき } |a_n| = \frac{2^{n-1} + 8 \times (-1)^{n-1}}{3} \quad \text{だから}$$

$n > 4$ のとき

$$T_n = 9 + \sum_{k=5}^n |a_k|$$

(初項 2^4 , 公比 2
項数 $(n-1)-4+1 = n-4$
の等比数列の和)

(初項 1 , 公比 -1
項数 $n-4$ の等比数列
の和)

$$= 9 + \frac{1}{3} \left((2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n-1}) + 8 \{ (-1)^4 + (-1)^5 + \dots + (-1)^n \} \right)$$

$$= 9 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{2^4(2^{n-4}-1)}{2-1} + 8 \times \frac{1 \times \{ 1 - (-1)^{n-4} \}}{1 - (-1)} \right\}$$

$$= 9 + \frac{1}{3} \left(2^n - 16 + \frac{8}{2} \{ 1 - (-1)^{n-4} \} \right)$$

$$= \frac{27 + 2^n - 16 + 4 - 4(-1)^{n-4}}{3}$$

$$= \frac{2^n + 15 - 4(-1)^{n-4}}{3} \quad \text{となり}$$

$$(-1)^{n-4} = \begin{cases} -1 & (n \text{ が 奇数}) \\ 1 & (n \text{ が 偶数}) \end{cases} \quad \text{だから}$$

$n > 4$ かつ n が奇数のとき.

$$T_n = \frac{2^n + 15 + 4}{3} = \frac{\boxed{2}^n + \boxed{19}}{\boxed{3}} \quad \text{テ}$$

$n > 4$ かつ n が偶数のとき

$$T_n = \frac{2^n + 15 - 4}{3} = \frac{\boxed{2}^n + \boxed{11}}{\boxed{3}} \quad \text{トニヌ}$$

解答記号 正解 配点

アイウエ -283 3

オカキクケコ -22419 3

サ 4 2

シ 9 2

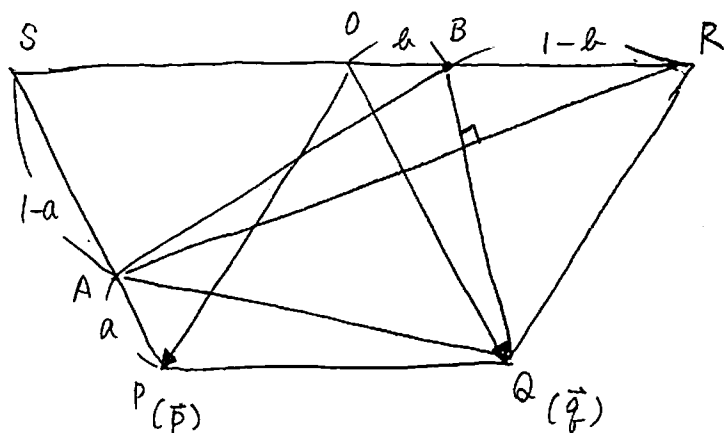
ス 2 2

セツ -1 2

タチツテ 2193 3

トニヌ 2113 3

20点



$$\begin{aligned} (1) \vec{OA} &= \vec{OP} + \vec{PA} \\ &= \vec{p} - \boxed{a} \vec{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= b \vec{OR} \\ &= b \vec{PQ} = b (\vec{q} - \vec{p}) \\ &= -\boxed{b} \vec{p} + \boxed{b} \vec{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よて } \vec{AR} &= \vec{OR} - \vec{OA} \\ &= \vec{PQ} - (\vec{p} - a \vec{q}) \\ &= (\vec{q} - \vec{p}) - \vec{p} + a \vec{q} \\ &= -\boxed{2} \vec{p} + (\boxed{a} + \boxed{1}) \vec{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \vec{BQ} &= \vec{OQ} - \vec{OB} \\ &= \vec{q} - (-b \vec{p} + b \vec{q}) \\ &= \boxed{b} \vec{p} + (\boxed{1} - \boxed{b}) \vec{q} \quad \text{となる} \end{aligned}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad |\vec{p}| = |\vec{q}| = 1 \quad \text{だから}$$

解答記号	正解	配点
ア	a	1
イウ	b b	1
エオカ	2 a 1	2
	または 2 1 a	
キクケ	b 1 b	2
コサシ	2 2 3	2
スセ	2 3	2
ソタチ	1 3 2	2
ツテト	3 9 7	2
ナニネノ	1 3 3 2 8	2
ハヒフヘホ	2 6 6 1 1	4

20点

$$\begin{aligned} \vec{AR} \cdot \vec{BQ} &= \{-2\vec{p} + (a+1)\vec{q}\} \cdot \{b\vec{p} + (1-b)\vec{q}\} \\ &= -2b|\vec{p}|^2 + (1+a)(1-b)|\vec{q}|^2 + \{(a+1)b - 2(1-b)\} \vec{p} \cdot \vec{q} \\ &= -2b + (1+a)(1-b) + (ab + b - 2 + 2b) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{-4b + 2(1+a-b-ab) + (ab + 3b - 2)\} \\ &= \frac{1}{2} (\boxed{2}a - \boxed{3}b - ab) \quad \text{となる} \end{aligned}$$

$$(2) AR \perp BQ \text{ のとき } \vec{AR} \cdot \vec{BQ} = 0 \text{ より}$$

$$2a - 3b - ab = 0 \quad \text{だから}$$

$$b(a+3) = 2a \quad \text{より}$$

$$b = \frac{\boxed{2}a}{a + \boxed{3}} \quad \text{となる}$$

$$\text{さらに } a = \frac{1}{2} \text{ とすると } b = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$\text{よって } \vec{AR} = -2\vec{p} + (a+1)\vec{q} = -2\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q} \text{ より}$$

$$|\vec{AR}|^2 = |-2\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}|^2$$

$$= 4|\vec{p}|^2 - 6\vec{p} \cdot \vec{q} + \frac{9}{4}|\vec{q}|^2$$

$$= 4 \times 1 - 6 \times \frac{1}{2} + \frac{9}{4} = 4 - 3 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \text{ だから } |\vec{AR}| = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ ㍻}$$

$$\text{また } \vec{BQ} = b\vec{p} + (1-a)\vec{q}$$

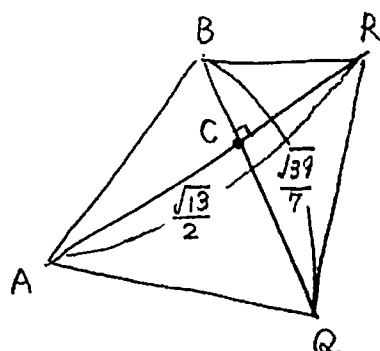
$$= \frac{2}{7}\vec{p} + \frac{5}{7}\vec{q} \text{ より}$$

$$|\vec{BQ}|^2 = \left| \frac{1}{7}(2\vec{p} + 5\vec{q}) \right|^2$$

$$= \frac{1}{49} \{ 4|\vec{p}|^2 + 20\vec{p} \cdot \vec{q} + 25|\vec{q}|^2 \}$$

$$= \frac{1}{49} (4 \times 1 + 20 \times \frac{1}{2} + 25 \times 1)$$

$$= \frac{1}{49} \times 39 \text{ よって } |\vec{BQ}| = \frac{\sqrt{39}}{7} \text{ ツテ}$$



ゆえに 四角形 ABQR の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{39}}{7} = \frac{\sqrt{13 \times 13 \times 3}}{28} = \frac{13\sqrt{3}}{28} \text{ ネノ}$$

また AR と BQ の交点を C とおくと

$$\vec{OC} = \vec{OA} + s\vec{AR} = \vec{OB} + t\vec{BQ} \quad (s, t \text{ は実数})$$

がなりたつから

$$\vec{OC} = (\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}) + s(-2\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}) = \frac{2}{7}(\vec{q} - \vec{p}) + t \times \frac{2\vec{p} + 5\vec{q}}{7} \text{ より}$$

$$(1-2s)\vec{p} + (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s)\vec{q} = (-\frac{2}{7} + \frac{2}{7}t)\vec{p} + (\frac{2}{7} + \frac{5}{7}t)\vec{q}$$

$$\vec{p}, \vec{q} \text{ は 1 次独立だから } \begin{cases} 1-2s = \frac{-2+2t}{7} & \text{--- ①} \\ \frac{-1+3s}{2} = \frac{2+5t}{7} & \text{--- ②} \end{cases} \text{ である}$$

$$\text{①} \times 5 \rightarrow 5 - 10s = \frac{-10 + 10t}{7}$$

$$\text{②} \times 2 \rightarrow -1 + 3s = \frac{4 + 10t}{7}$$

$$\text{①} \times 5 - \text{②} \times 2 \text{ より } 6 - 13s = \frac{-14}{7}$$

$$\text{よって } 13s = 6 + 2 \text{ より}$$

$$s = \frac{8}{13}$$

$$\text{ゆえに } \vec{OC} = (1 - 2 \times \frac{8}{13})\vec{p} + (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{8}{13})\vec{q}$$

$$= -\frac{3}{13}\vec{p} + \frac{-13 + 24}{26}\vec{q}$$

$$= -\frac{3}{13}\vec{p} + \frac{11}{26}\vec{q}$$

$$= \frac{1}{26}(-6\vec{p} + 11\vec{q})$$

ハテ ㍻