

2007センター追試数学 II B 解答

第1問 (30点)

解答記号	正解	配点
アイウ	2 5 1	3
エオカ	－ 1 5	3
キク	3 3	3
ケコサ	－ 1 2	3
シ	4	2
ス	4	2
セ	3	2
ソタ	2 3	4
チツ	7 7	4
テトナ	4 2 1	4

第2問 (30点)

解答記号	正解	配点
アイ	2 1	5
ウ	0	2
エ	0	2
オカ	4 3	4
キ	a	2
クケコ	2 a 2	2
サシスセ	－ 1 1 2	4
ソタチ	1 2 a	5
ツテトナニ	1 6 3 a 1	4

第3問 (20点)

解答記号	正解	配点
アイ	1 4	2
ウ	3	2
エ	2	2
オカキ	2 3 1	4
クケ	3 2	3
コサ	3 2	3
シスセソ	3 4 9 1	3
タチ	1 2	1

第4問 (20点)

解答記号	正解	配点
アイウエ	6 a 9 3 または 6 9 a 3	3
オカキ	2 3 1	2
ク	6	2
ケコサ	4 5 2	2
シスセ	8 1 6	2
ソタ	3 7	2
チ	0	1
ツテト	3 7 2	3
ナニヌネノハ	7 3 2 7 3 2	3

$$(1) \quad 5p^x - \frac{1}{p^x} = q(p^x + \frac{1}{p^x}) \text{ の両辺 } p^x \text{ をかけ}$$

$$5(p^x)^2 - 1 = q((p^x)^2 + 1) \text{ より}$$

$$p^{2x} (\underbrace{5}_{\text{イ}} - q) = \underbrace{1}_{\text{ウ}} + q \quad \text{--- ①}$$

$p^{2x} > 0$ より $5 - q$ と $1 + q$ が同符号であればよいから

$5 - q$ と $1 + q$ の積が正となるので

$$(5 - q)(1 + q) > 0 \text{ より}$$

$$-(q - 5)(q + 1) > 0$$

$$\text{よって } (q - 5)(q + 1) < 0 \text{ より}$$

$$\underbrace{-1}_{\text{エオ}} < q < \underbrace{5}_{\text{カ}} \text{ である}$$

$$(2) \quad p = 3, \quad q = \frac{1}{2} \text{ のとき ①は}$$

$$3^{2x} (5 - \frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$3^{2x} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$3^{2x} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

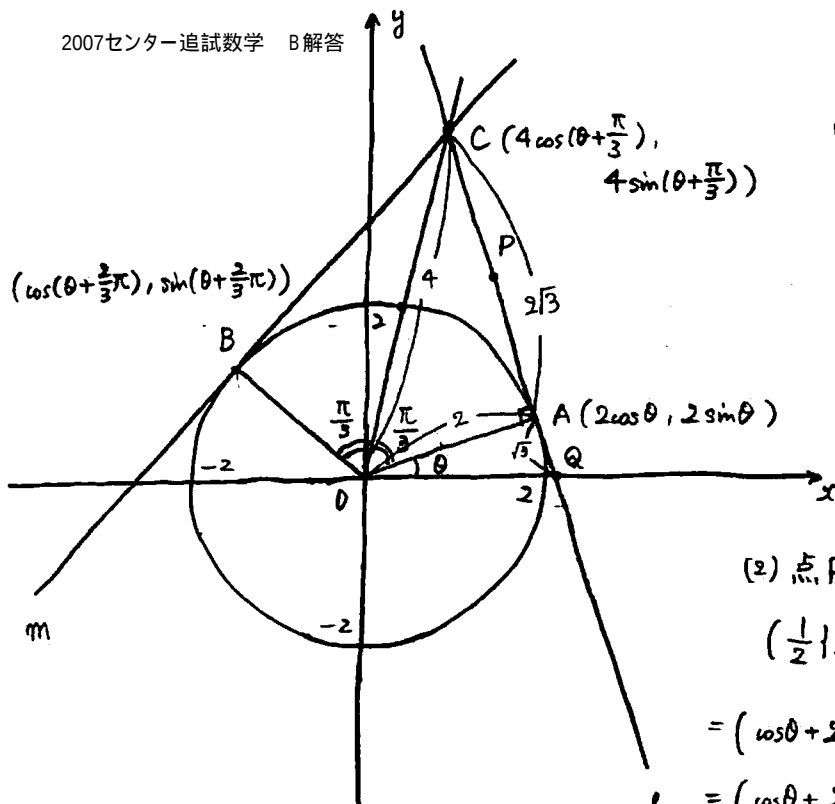
$$\text{よって } 3^x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\text{キ}} \text{ であり}$$

$$3^x = 3^{-\frac{1}{2}} \text{ より}$$

$$x = \underbrace{\frac{-1}{2}}_{\text{ケコサ}} \text{ となる}$$

解答記号	正解	配点
アイウ	251	3
エオカ	-15	3
キク	33	3
ケコサ	-12	3

12点



$$(1) OC \cos \frac{\pi}{3} = OA \text{ より}$$

$$OC = \frac{2}{\frac{1}{2}} = \boxed{4} \text{ シ}$$

よ、点 C の座標は

$$\left(\boxed{4} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right), 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right) \text{ である}$$

(2) 点 P の座標は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \{ 2 \cos \theta + 4 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \}, \frac{1}{2} \{ 2 \sin \theta + 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \} \right) \\ &= \left(\cos \theta + 2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right), \sin \theta + 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= \left(\cos \theta + 2 \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}, \right. \\ & \quad \left. \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \left(\cos \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta + 2 \left(\sin \theta \right) \cdot \frac{1}{2} + 2 \left(\cos \theta \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \left(\boxed{2} \cos \theta - \boxed{\sqrt{3}} \sin \theta, 2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \right) \text{ となる} \end{aligned}$$

$\triangle OAC = 2 \triangle OQA$ のとき

$$\frac{1}{2} OA \cdot AC = 2 \times \frac{1}{2} OA \cdot AQ \text{ より}$$

$AC = 2AQ$ である。

$$\therefore AC = 2 \tan \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \text{ より } AQ = \sqrt{3}$$

よ、三平方の定理より

$OQ = \sqrt{7}$ であるから

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \\ \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \end{cases} \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに点 P の座標は} & \left(2 \times \frac{2\sqrt{7}}{7} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{21}}{7}, 2 \times \frac{\sqrt{21}}{7} + \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} \right) \\ &= \left(\frac{4\sqrt{7}}{7} - \frac{3\sqrt{7}}{7}, \frac{2\sqrt{21}}{7} + \frac{2\sqrt{21}}{7} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{4\sqrt{21}}{7} \right) \text{ となる。} \end{aligned}$$

解答記号

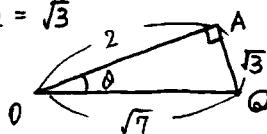
正解

配点シ

シ
ス
セ
ソタ
チツ
テトナ

4
4
3
2 3
7 7
4 2 1

2
2
2
4
4
4
18点



$$f(x) = (x+1) \{x^2 - (3a-2)x + 2a(a-1)\} \quad \left| \begin{array}{l} \times -a \\ -2(a-1) \end{array} \right.$$

$$= (x+1)(x-a) \{x - (2a-2)\} \quad \text{である}$$

$$\begin{aligned} \text{また } f(x) &= x^3 + (1-a-(2a-2))x^2 + (-a+a(2a-2)-(2a-2))x + a(2a-2) \\ &= x^3 + (-3a+3)x^2 + (2a^2-5a+2)x + 2a^2-2a \quad \text{である} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2(-3a+3)x + (2a^2-5a+2) \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 - 2(-3a+3) + 2a^2-5a+2 \\ &= 2a^2+a-1 \end{aligned}$$

ゆえに $P(-1, 0)$ における $y = f(x)$ の接線は

$$y = \left(\underset{P}{2}a^2 + a - \underset{1}{1} \right) (x+1) \quad \text{である}$$

(別解) 積の導関数の公式より

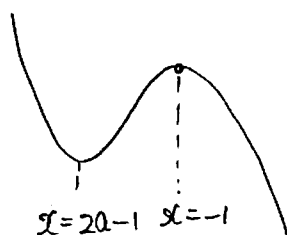
$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) \{x^2 - (3a-2)x + 2a(a-1)\} \quad \text{のとき} \\ f'(x) &= 1 \times \{x^2 - (3a-2)x + 2a(a-1)\} + (x+1) \{2x - (3a-2)\} \\ \therefore f'(-1) &= 1 + (3a-2) + 2a^2-2a + 0 \\ &= 2a^2+a-1 \end{aligned}$$

$$g(x) = (2a^2+a-1)(x+1) - f(x) \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2a^2+a-1) - \{3x^2 + 2(-3a+3)x + (2a^2-5a+2)\} \\ &= -3x^2 + 6(a-1)x + 6a-3 \\ &= -3 \{x^2 - 2(a-1)x - (2a-1)\} \quad \left(\begin{array}{l} \times -(2a-1) \\ 1 \end{array} \right) \\ &= -3(x+1) \{x - (2a-1)\} \end{aligned}$$

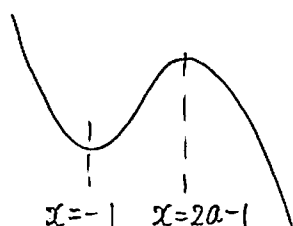
(i) $2a-1 < -1$ のとき、つまり $a < \overset{7}{0}$ のとき

$$\text{極大値は } g(-1) = \boxed{0} \text{ である}$$



(ii) $-1 < 2a-1$ のとき、つまり $a > 0$ のとき

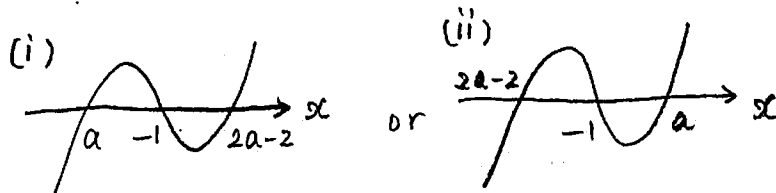
$$\begin{aligned} \text{極大値は } g(2a-1) &= (2a^2+a-1) \times (2a-1+1) - f(2a-1) \\ &= (2a^2+a-1) \times 2a - (2a-1+1)(2a-1-a) \\ &\quad \times \{ (2a-1) - (2a-2) \} \\ &= (2a^2+a-1) \times 2a - 2a(a-1) \times 1 \\ &= 2a \{ (2a^2+a-1) - (a-1) \} \\ &= \boxed{4}a^{\boxed{3}} \text{ である} \end{aligned}$$



$$f(x) = (x+1)(x-a)\{x-(2a-2)\} \text{ より}$$

$y=f(x)$ と x 軸との共有点は $(-1, 0)$, $(\overset{\neq}{a}, 0)$, $(\overset{7\text{ヶ}}{2a-2}, \overset{\text{コ}}{0})$ である

$(-1, 0)$ が他の2点の中間のとき

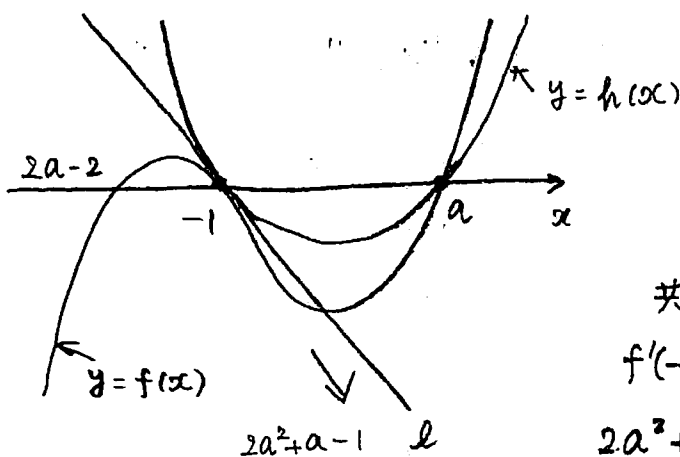


$$a < -1 < 2a-2 \quad \text{または} \quad 2a-2 < -1 < a \quad \text{より}$$

$$(a < -1 \text{ かつ } -1 < 2a-2) \text{ または } (2a-2 < -1 \text{ かつ } -1 < a)$$

$$(a < -1 \text{ かつ } a > \frac{1}{2}) \text{ または } (a < \frac{1}{2} \text{ かつ } -1 < a)$$

よって (ii) の場合の $\boxed{-1} < a < \boxed{\frac{1}{2}}$ のみである



求める放物線 $y=h(x)$ は

$$h(x) = k(x+1)(x-a) \text{ とおける.}$$

$$h'(x) = k\{1 \times (x-a) + (x+1) \times 1\} \text{ であり}$$

共通接線 l をもつから

$$f'(-1) = h'(-1) \text{ より}$$

$$2a^2+a-1 = k(-1-a) \text{ だから}$$

$$(2a-1)(a+1) = -k(a+1)$$

$$a \neq -1 \text{ より} \quad 2a-1 = -k$$

$$\text{よって } k = 1-2a$$

$$\text{ゆえに } h(x) = (\boxed{1}-\boxed{2a})(x+1)(x-a) \text{ となる}$$

$$\text{よって } I = \int_{-1}^0 h(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (1-2a)(x+1)(x-a) dx$$

$$= (1-2a) \int_{-1}^0 (x+1)\{(x+1)-(a+1)\} dx$$

$$= (1-2a) \int_{-1}^0 \{(x+1)^2 - (a+1)(x+1)\} dx$$

$$= (1-2a) \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 - (a+1) \times \frac{1}{2}(x+1) \right]_{-1}^0$$

$$= (1-2a) \times \left\{ \frac{1}{3} - (a+1) \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{6}(1-2a)\{2-3(a+1)\} = -\boxed{\frac{1}{6}}(1-2a)(\boxed{3a}+\boxed{1}) \text{ となる}$$

解答記号	正解	配点
アイ	21	5
ウ	0	2
エ	0	2
オカ	43	4
キ	a	2
クケコ	2a2	2
サシセ	-112	4
ソタチ	12a	5
ツテナニ	163a1	4

30点

$$(1) \quad a_5 = b_2 \text{ より } a + 4d = ar \text{ かつ } 4d = ar - a \text{ より}$$

$$d = \frac{a(r-1)}{4} \text{ である } \text{---} \textcircled{1}$$

$$\text{さらに } a_{17} = d_3 \text{ とすると } a + 16d = ar^2 \text{ であり } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$a + 16 \times \frac{a(r-1)}{4} = ar^2$$

$$a + 4a(r-1) = ar^2$$

$$a \neq 0 \text{ より } 1 + 4(r-1) = r^2$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$(r-1)(r-3) = 0$$

$$r \neq 1 \text{ より } r = \boxed{3} \text{ となり } \textcircled{1} \text{ より } d = \frac{a(3-1)}{4} = \frac{a}{2}$$

$$\text{このとき } a_n = a + (n-1) \times \frac{a}{2}, \quad b_m = a \times 3^{m-1} \text{ であるから}$$

$$a_m = b_m \text{ のとき } a + (m-1) \times \frac{a}{2} = a \times 3^{m-1} \text{ であり}$$

$$a \neq 0 \text{ より } 1 + \frac{m-1}{2} = 3^{m-1}$$

$$\frac{m}{2} + \frac{1}{2} = 3^{m-1}$$

$$m+1 = 2 \cdot 3^{m-1}$$

$$\text{よって } m = \frac{2 \times 3^{m-1}}{2} - \frac{1}{2} \text{ となる}$$

$$(2) \quad C_n = 2 \times 3^{n-1} - 1 \text{ のとき } 3C_n = 2 \times 3^n - 3 \text{ であるから } 2 \times 3^n = 3C_n + 3$$

$$\text{よって } C_{n+1} = 2 \times 3^n - 1 = 3C_n + 3 - 1 \text{ より}$$

$$C_{n+1} = \boxed{3} C_n + \boxed{2} \text{ である}$$

$$\text{このとき } d_n = pC_n^2 + 3C_n + 2 \text{ で表すとき}$$

$$\{d_n\} \text{ の階差数列は } d_{n+1} - d_n \text{ より}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= (pC_{n+1}^2 + 3C_{n+1} + 2) - (pC_n^2 + 3C_n + 2) \\ &= p(C_{n+1}^2 - C_n^2) + 3(C_{n+1} - C_n) \\ &= (C_{n+1} - C_n) \{ p(C_{n+1} + C_n) + 3 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore C_{n+1} - C_n &= (2 \times 3^n - 1) - (2 \times 3^{n-1} - 1) \\
 &= 2 \times 3 \times 3^{n-1} - 2 \times 3^{n-1} \\
 &= (6-2) \times 3^{n-1} = 4 \times 3^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{n+1} + C_n &= (2 \times 3^n - 1) + (2 \times 3^{n-1} - 1) \\
 &= 3 \times 2 \times 3^{n-1} + 2 \times 3^{n-1} - 2 \\
 &= 8 \times 3^{n-1} - 2 \quad \text{だから}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} - d_n &= 4 \times 3^{n-1} \times \{ p(8 \times 3^{n-1} - 2) + 3 \} \\
 &= 32p \times (3^{n-1})^2 + 4 \times 3^{n-1} \times (-2p + 3) \quad \text{である}
 \end{aligned}$$

$$\text{これが等比数列となるから } -2p + 3 = 0 \text{ より } p = \boxed{\frac{3}{2}} \text{ である}$$

$$\begin{aligned}
 \text{このとき } d_{n+1} - d_n &= 32p \times 9^{n-1} \\
 &= 32 \times \frac{3}{2} \times 9^{n-1} = 48 \times 9^{n-1} \quad \text{である}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{3}{2} C_1^2 + 3C_1 + 2 \quad \text{で } C_1 = 2 \times 3^{1-1} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ より} \\
 d_1 &= \frac{3}{2} \times 1^2 + 3 \times 1 + 2 = \frac{13}{2} \quad \text{だから}
 \end{aligned}$$

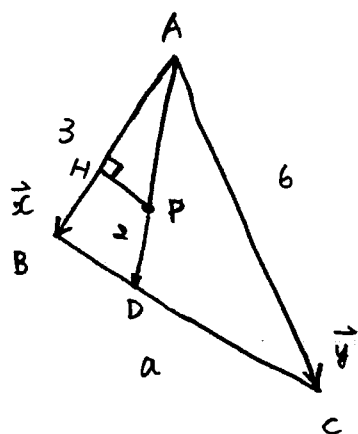
$$\begin{aligned}
 n \geq 2 \text{ のとき } d_n &= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 48 \times 9^{k-1} \\
 &= \frac{13}{2} + \frac{48(9^{n-1} - 1)}{9 - 1} \\
 &= \frac{13}{2} + 6 \times (9^{n-1} - 1)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + 6 \times 9^{n-1} \quad (\text{これは } d_1 = \frac{13}{2} \text{ を } 4 \text{ 倍して})$$

$$\therefore d_n = \frac{1}{2} + 6 \times 9^{n-1} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n d_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} + 6 \times 9^{k-1} \right) \\
 &= \frac{6(9^n - 1)}{9 - 1} + \frac{1}{2} n \\
 &= \boxed{\frac{3}{4}} \left(\boxed{9}^n - \boxed{1} \right) + \boxed{\frac{1}{2}} n \quad \text{である}
 \end{aligned}$$

解答記号	正解	配点
ア	14	2
イ	3	2
エ	2	2
オカキ	231	4
ク	32	3
コサ	32	3
シセリ	3491	3
タチ	12	1



$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a\vec{PA} + 6\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0} \quad \text{より} \\
 & -a\vec{AP} + 6(\vec{AB} - \vec{AP}) + 3(\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0} \\
 & (-a-9)\vec{AP} + 6\vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{0} \\
 \text{よって} \quad & (a+9)\vec{AP} = 6\vec{x} + 3\vec{y} \quad \text{より} \\
 \vec{AP} = & \frac{\boxed{6}}{\boxed{a+9}} \vec{x} + \frac{\boxed{3}}{\boxed{a+9}} \vec{y}
 \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \vec{AD} = k\vec{AP} \quad \text{とできるから} \quad \vec{AD} = \frac{6k}{a+9} \vec{x} + \frac{3k}{a+9} \vec{y} \quad \text{とあり}$$

$$\text{Dは直線BC上より} \quad \frac{6k}{a+9} + \frac{3k}{a+9} = 1 \quad \text{とあるから}$$

$$\frac{9}{a+9} k = 1 \quad \text{よって} \quad k = \frac{a+9}{9} \quad \text{とあるから}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AD} &= \frac{a+9}{9} \left(\frac{6}{a+9} \vec{x} + \frac{3}{a+9} \vec{y} \right) \\
 &= \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \vec{x} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \vec{y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \vec{AD} \cdot \vec{x} &= \frac{1}{3} (2\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} \\
 &= \frac{2}{3} |\vec{x}|^2 + \frac{1}{3} \vec{x} \cdot \vec{y} \\
 &= \frac{2}{3} \times 9 + \frac{1}{3} \vec{x} \cdot \vec{y} = \boxed{6} + \frac{1}{3} \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \text{であり}
 \end{aligned}$$

$$\text{余弦定理より} \quad a^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \text{だから}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{\boxed{45} - a^2}{\boxed{2}} \quad \text{より}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{x} = 6 + \frac{1}{3} \times \frac{45 - a^2}{2} \quad \text{から}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{x} = \frac{36 + 45 - a^2}{6} = \frac{\boxed{81} - a^2}{\boxed{6}}$$

$$(3) \quad AD = 2 \quad \text{のとき} \quad |\vec{AD}|^2 = 2^2 \quad \text{より}$$

$$\left| \frac{2\vec{x} + \vec{y}}{3} \right|^2 = 4 \quad \text{から}$$

$$4|\vec{x}|^2 + 4\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2 = 36 \quad \text{より}$$

$$4 \times 9 + 4 \times \frac{45 - a^2}{2} + 36 = 36$$

$$4 \times 9 + 2(45 - a^2) = 0$$

$$18 + 45 - a^2 = 0$$

$$a^2 = 63$$

$$\text{よって} \quad a = \boxed{3\sqrt{7}} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{PH} \cdot \vec{x} = \boxed{0} \quad \text{であるから} \quad \overrightarrow{AH} = t\vec{x} \text{ とおくと}$$

$$(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}) \cdot \vec{x} = 0$$

$$t|\vec{x}|^2 - \frac{3}{a+9} (2\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x} = 0$$

$$t \times 9 - \frac{3}{a+9} (2|\vec{x}|^2 + \vec{x} \cdot \vec{y}) = 0$$

$$9t - \frac{3}{a+9} \left(18 + \frac{45 - a^2}{2} \right) = 0$$

$$a = 3\sqrt{7} \text{ より}$$

$$9t - \frac{3}{3\sqrt{7}+9} \left(\frac{36 + 45 - 63}{2} \right) = 0$$

$$9t = \frac{1}{\sqrt{7}+3} \times \frac{18}{2}$$

$$t = \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} = \boxed{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}$$

$$= t\vec{x} - \frac{3}{a+9} (2\vec{x} + \vec{y})$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}}{2} \vec{x} - \frac{3}{3\sqrt{7}+9} (2\vec{x} + \vec{y})$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}}{2} \vec{x} - \frac{1}{\sqrt{7}+3} (2\vec{x} + \vec{y})$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}}{2} \vec{x} - \frac{3-\sqrt{7}}{9-7} (2\vec{x} + \vec{y})$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}}{2} (\vec{x} - 2\vec{x} - \vec{y})$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}}{2} (-\vec{x} - \vec{y})$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{7}-3}{2}} \vec{x} + \boxed{\frac{\sqrt{7}-3}{2}} \vec{y}$$

解答記号	正解	配点
アイウエ	6 a 9 3	3
オカキ	2 3 1	2
ク	6	2
ケコサ	4 5 2	2
シスセ	8 1 6	2
ソタ	3 7	2
チ	0	1
ツテト	3 7 2	3
ナニヌネノハ	7 3 2 7 3 2	3
		20点