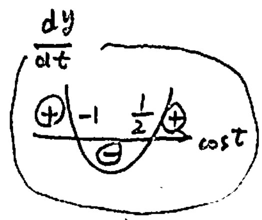
(1) $x=\sin t$, $y=(1+\cos t)\sin t$ より

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=(-\sin t)\times\sin t+(1+\cos t)\cos t$$
$$=-(1-\cos^2 t)+\cos t+\cos^2 t$$
$$=2\cos^2 t+\cos t-1\quad (=(\cos t+1)(2\cos t-1))$$



よって $\boxed{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}=\boxed{2\cos t+1-\dfrac{1}{\cos t}}$

また $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$$=\frac{d}{dt}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\left\{-2\sin t+\frac{1}{\cos^2 t}\times(-\sin t)\right\}\frac{1}{\cos t}$$
$$=-2\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{1}{\cos^2 t}\times\left(-\frac{\sin t}{\cos t}\right)$$
$$=-2\tan t-(1+\tan^2 t)\tan t$$
$$=\boxed{-\tan^3 t-3\tan t}$$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ をとくと $-\tan^3 t-3\tan t>0$ より

$$\tan t(\tan^2 t+3)<0$$

ここで $\tan^2 t+3$ は 正より $\tan t<0$ であればよいから

$$\frac{\pi}{2}<t<\pi$$

同様に $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ をとくと $\tan t>0$ より　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$

よって $\boxed{0<t<\frac{\pi}{2}\text{ で上に凸},\ \frac{\pi}{2}<t<\pi\text{ で下に凸}}$ となる

また 増減表（追跡表）は 以下のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
(x, y) と $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ の向き	$(0, 0)$	↗	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	↘	$(1, 1)$	↙	$(0, 0)$

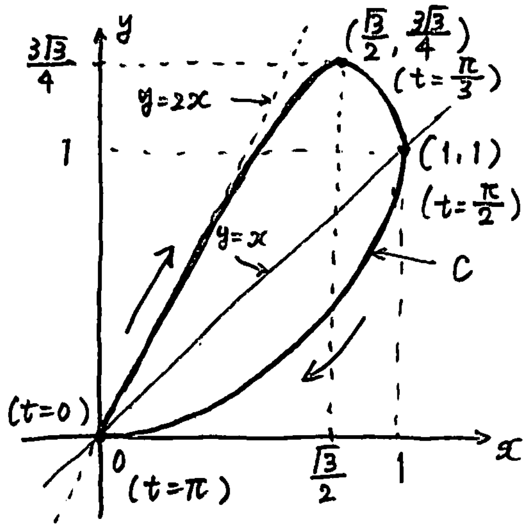
$t=\frac{\pi}{3}$ で $x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$t=\frac{\pi}{2}$ で $x=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $y=\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{t\to+0}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)=2+1-\frac{1}{1}=2,$$

$$\lim_{t\to\pi-0}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{t\to\pi-0}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)=-2+1-\frac{1}{-1}=0$$ より

Cの概形は以下のようになる



(3) 求める面積を S とすると $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $y\geqq x$ の部分、$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で $y\leqq x$ の部分にあることから

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ でのCの y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とすると

$$S=\int_0^1(y_1-x)\,dx+\int_0^1(x-y_2)\,dx$$ であり

$$S=\int_0^1 y_1\,dx-\int_0^1 y_2\,dx\cancel{-\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 x\,dx}$$ だから

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos t)\sin t\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(1+\cos t)\sin t\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin t\cos t+\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin^2 t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{3}\cos^3\pi+\frac{1}{3}\cos^3 0=-\frac{1}{3}\times(-1)^3+\frac{1}{3}\times 1^3$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$$ となる