

(1) $y = mx + n$ を $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ に代入して

$$x^2 + \frac{1}{4}(mx+n)^2 = 1 \text{ より}$$

$$4x^2 + (mx+n)^2 = 4$$

$$(m^2+4)x^2 + 2mnx + n^2 - 4 = 0$$

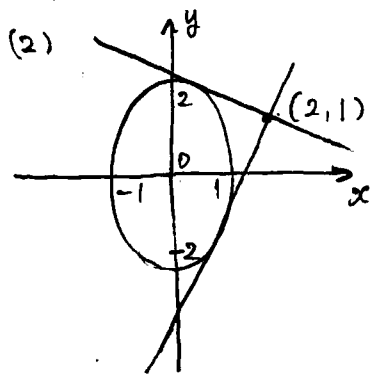
これが重解をもつので、この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 0 \text{ より } \frac{D}{4} = (mn)^2 - (m^2+4)(n^2-4) = 0 \text{ より}$$

$$m^2n^2 - (m^2n^2 - 4m^2 + 4n^2 - 16) = 0$$

$$4m^2 - 4n^2 + 16 = 0$$

$$\text{ゆえに } \boxed{m^2 - n^2 + 4 = 0} \text{ となる}$$



$x=2$ は明らかに接線ではないから

求める接線は $y = k(x-2) + 1$ とおけるので

$$y = kx + (1-2k) \text{ となる}$$

(1)より、これが楕円に接する条件は

$$k^2 - (1-2k)^2 + 4 = 0 \text{ となるから}$$

$$-3k^2 + 4k + 3 = 0 \text{ より}$$

$$3k^2 - 4k - 3 = 0$$

この2つの解を k_1, k_2 とすると解と係数の関係より

$$k_1 k_2 = \frac{-3}{3} = -1 \text{ であるから}$$

2つの接線の傾きの積が -1 となるので

2接線は直交する。

(i) 直交する接線の片方が x 軸に垂直のとき

2接線の交点は $(1, 2), (-1, 2), (-1, -2), (1, -2)$

の4つである

(ii) 直交する接線がどちらも x 軸, y 軸に平行でないとき

2接線の交点が (p, q) を通るとすると

(p, q) は上の4点にはならず

$$y = k(x-p) + q \text{ をみなすので}$$

$$y = kx + (q - pk) \text{ である}$$

(1)より、これが楕円に接する条件は

$$k^2 - (q - pk)^2 + 4 = 0 \text{ より}$$

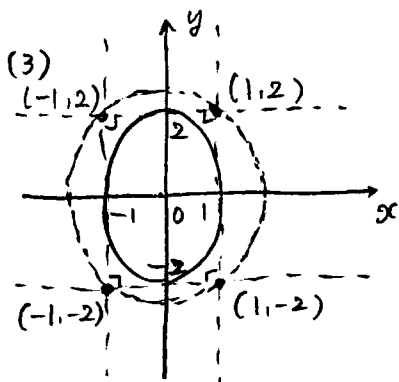
$$(1-p^2)k^2 + 2pqk + (4-q^2) = 0$$

この2つの解を α, β とすると、解と係数の関係より

$$\alpha\beta = \frac{4-q^2}{1-p^2} \text{ であり、}$$

2接線が直交するから $\alpha\beta = -1$ より $\frac{4-q^2}{1-p^2} = -1$ だから

$$4 - q^2 = -1 + p^2 \text{ よって } p^2 + q^2 = 5 \text{ をみたら}$$



ゆえに 2 接線の交点は $\Gamma: x^2 + y^2 = 5$ 上 (但し、(i) の 4 点除く) となる

(i) (ii) より、求める交点の軌跡は $\Gamma: x^2 + y^2 = 5$ 全体となる