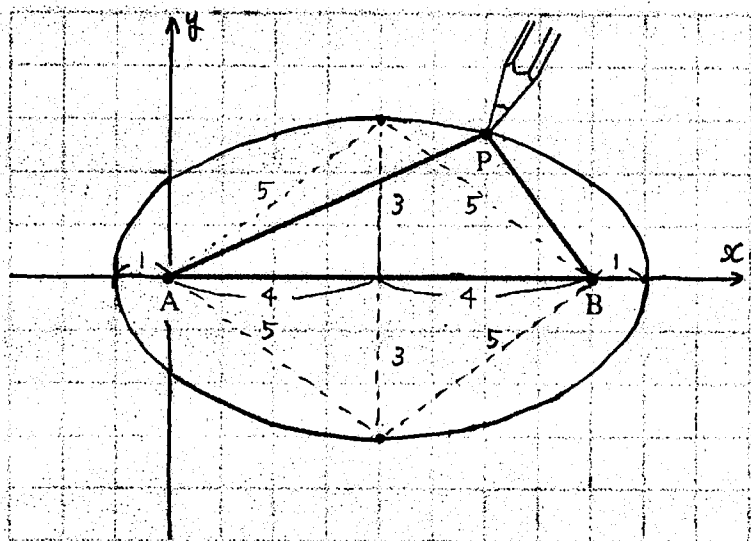




1目盛りは1とする

(1) ABの中点を原点, ABをx軸
とすると、た円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ①
を描く (左図)

(2) AP+BPの長さが10で一定なので
A, Bを焦点とするた円となる

(3) (1)の①をx軸方向に4平行移動
したものだから

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{--- ② となる}$$

(4) $y = \frac{3\sqrt{3}}{13}x$ を ② に代入して

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{1}{9} \times \frac{9 \times 3}{13^2} x^2 = 1 \quad \text{より}$$

$$13^2(x-4)^2 + 25 \cdot 3x^2 = (5 \times 13)^2$$

$$244x^2 - 169 \times 8x + 13^2 \times 16 - 13^2 \times 25 = 0$$

$$4 \times 61x^2 - 169 \times 8x - 13^2 \times 9 = 0$$

$$\therefore x = \frac{169 \times 4 \pm \sqrt{169^2 \times 4^2 + 4 \times 61 \times 13^2 \times 9}}{4 \times 61}$$

$$= \frac{169 \times 4 \pm 13 \times 2 \sqrt{169 \times 4 + 61 \times 9}}{4 \times 61}$$

$$= \frac{169 \times 2 \pm 13 \sqrt{1225}}{2 \times 61}$$

$$= \frac{169 \times 2 \pm 13 \times 35}{2 \times 61}$$

$$= \frac{338 \pm 455}{122} = \frac{793}{122}, -\frac{117}{122}$$

$$x = \frac{13}{2} \text{ のとき } y = \frac{3\sqrt{3}}{13} \times \frac{13}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

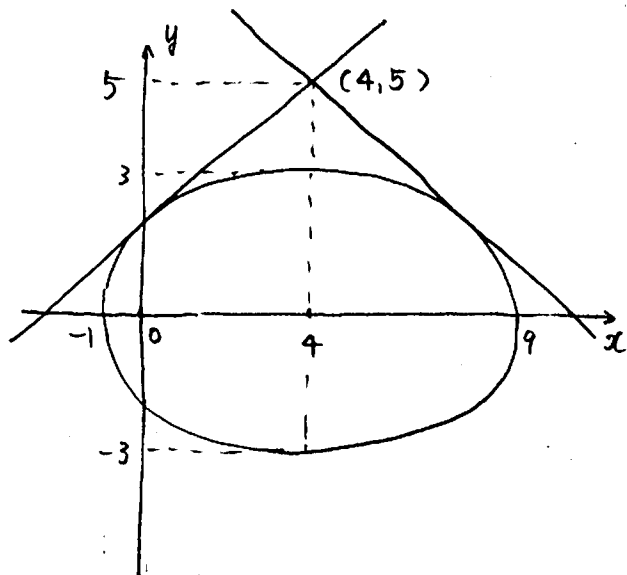
$$x = -\frac{117}{122} \text{ のとき } y = \frac{3\sqrt{3}}{13} \times \left(-\frac{117}{122}\right) = -\frac{27\sqrt{3}}{122}$$

ゆえに、求める交点の座標は $\left(\frac{13}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{117}{122}, -\frac{27\sqrt{3}}{122}\right)$ となる

$$\begin{pmatrix} 2 & 13 & \rightarrow 13 \times 122 \\ 122 & -13 \times 9 & \rightarrow -13 \times 18 \\ & & \hline & & 13 \times 104 \\ & & = 13 \times 13 \times 8 \end{pmatrix}$$

で因数分解も可

$$\begin{array}{r} 676 \\ + 549 \\ \hline 1225 \\ 5 \overline{) 1225} \\ 5 \overline{) 1245} \\ 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 122 \overline{) 793} \\ \underline{732} \\ 61 \end{array}$$



$$(5) \quad y = m(x - 4) + 5 \text{ は}$$

$$y - 5 = m(x - 4) \quad \text{--- ③ より}$$

(4, 5) を通り 傾き m の直線である

② 式の両辺 m^2 をかけると

$$\frac{m^2(x-4)^2}{25} + \frac{m^2 y^2}{9} = m^2 \text{ より}$$

③ を代入して

$$\frac{(y-5)^2}{25} + \frac{m^2 y^2}{9} = m^2$$

$$\text{よって} \quad 9(y-5)^2 + 25m^2 y^2 = 225m^2$$

$$(25m^2 + 9)y^2 - 90y + 225(1 - m^2) = 0 \quad \text{--- ④}$$

この式が「重解をもつので」、この判別式を D とすると $\frac{D}{4} = 0$ より

$$\frac{D}{4} = (-45)^2 - (25m^2 + 9) \times 225(1 - m^2) = 0 \text{ だから}$$

$$45 \times 45 - 45 \times 5(25m^2 + 9)(1 - m^2) = 0$$

$$9 - (-25m^4 + 16m^2 + 9) = 0$$

$$25m^4 - 16m^2 = 0$$

$$m^2(25m^2 - 16) = 0$$

$m = 0$ のとき ④ は $y = 5$ で「重解となるが」③ がただ1本の接線とならず不適

$$\text{よって} \quad m^2 = \frac{16}{25} \text{ より} \quad m = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{このとき ④ の重解は} \quad y = \frac{45}{25m^2 + 9} = \frac{45}{16 + 9} = \frac{45}{25} = \frac{9}{5} \text{ であり}$$

$$\text{③ は} \quad \frac{9}{5} - 5 = m(x - 4) \text{ より}$$

$$m(x - 4) = -\frac{16}{5}$$

$$\text{よって} \quad m = \frac{4}{5} \text{ のとき} \quad \frac{4}{5}(x - 4) = -\frac{16}{5} \text{ より}$$

$$x - 4 = -4$$

$$\text{ゆえに} \quad x = 0$$

$$m = -\frac{4}{5} \text{ のとき} \quad -\frac{4}{5}(x - 4) = -\frac{16}{5} \text{ より}$$

$$x - 4 = 4$$

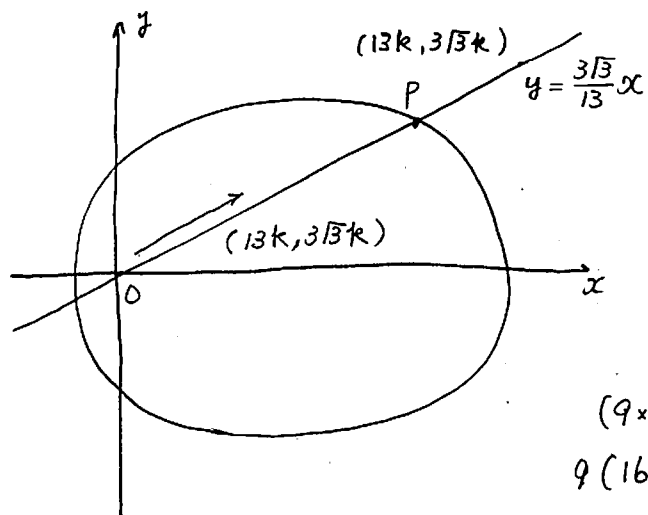
$$\text{ゆえに} \quad x = 8$$

以上のことから

$$m = \frac{4}{5} \text{ のとき 接点 } (0, \frac{9}{5})$$

$$m = -\frac{4}{5} \text{ のとき 接点 } (8, \frac{9}{5})$$

となる



(4)(別解) $y = \frac{3\sqrt{3}}{13}x$ 上の点は

$(13k, 3\sqrt{3}k)$ とおけるから

②に代入して

$$\frac{(13k-4)^2}{25} + \frac{27k^2}{9} = 1 \text{ より}$$

$$9(13k-4)^2 + 27 \times 25k^2 = 9 \times 25$$

$$(9 \times 169 + 27 \times 25)k^2 - 2 \times 9 \times 13 \times 4k + 9 \times 16 - 9 \times 25 = 0$$

$$9(169 + 3 \times 25)k^2 - 9 \times 104k + 9(16 - 25) = 0$$

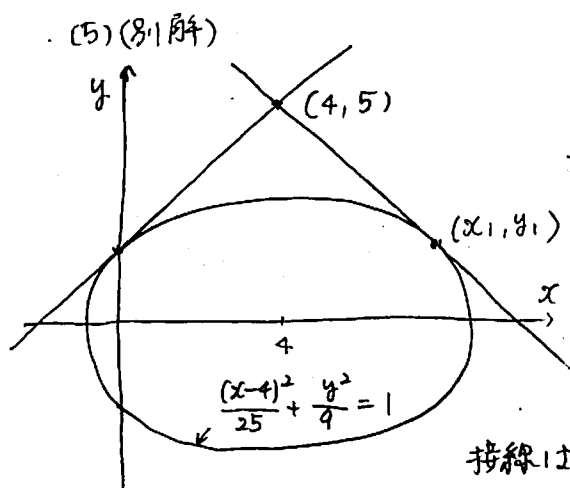
$$244k^2 - 104k - 9 = 0$$

$$(2k-1)(122k+9) = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -122 \\ 122 & 9 & -104 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{cc|c} -122 & -1 & 1 \\ 18 & 9 & 1 \end{array}$$

$$\text{よって } k = \frac{1}{2}, -\frac{9}{122} \text{ より}$$

求める交点の座標は $k = \frac{1}{2}$ のとき $\left(\frac{13}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$
 $k = -\frac{9}{122}$ のとき $\left(-\frac{117}{122}, -\frac{27\sqrt{3}}{122} \right)$ となる



$y = mx - 4m + 5$ は ③

$y - 5 = m(x - 4)$ より $(4, 5)$ を通り傾き m の直線である

②より $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ の両辺 x で微分すると

$$\frac{2(x-4)}{25} + \frac{2yy'}{9} = 0 \text{ より}$$

$$y \neq 0 \text{ のとき } y' = -\frac{9(x-4)}{25y} \quad \text{--- ⑤}$$

よって ④より $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における

接線は $y = -\frac{9(x_1-4)}{25y_1}(x-x_1) + y_1$ より (但し $y_1 \neq 0$)

$$\frac{y_1 y}{9} + \frac{(x_1-4)(x-4) - (x_1-4)y_1}{25} = \frac{y_1^2}{9}$$

$$\text{よって } \frac{(x_1-4)(x-4)}{25} + \frac{y_1 y}{9} = \frac{(x_1-4)^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} \text{ であり}$$

(x_1, y_1) は④より右辺は1だから $\frac{(x_1-4)(x-4)}{25} + \frac{y_1 y}{9} = 1$ --- ⑥ をみれば (但し $y_1=0$ でも②の接線である)

また、このときの傾き m は $m = -\frac{9(x_1-4)}{25y_1}$ である (⑤より)

⑥が $(4, 5)$ を通るとき $\frac{(x_1-4)(4-4)}{25} + \frac{y_1 \times 5}{9} = 1$ より $y_1 = \frac{9}{5}$

このとき (x_1, y_1) は④より $\frac{(x_1-4)^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1$ だから

$$(x_1-4)^2 = 25 \left(1 - \frac{1}{9} \times \frac{81}{25} \right)$$

$$(x_1-4)^2 = 25 \times \frac{16}{25} \text{ よって } x_1-4 = \pm 4 \text{ より } x_1 = 0, 8$$

ゆえに 接点 $(0, \frac{9}{5})$ のとき $m = -\frac{9(x_1-4)}{25y_1} = -\frac{9(0-4)}{25 \times \frac{9}{5}} = \frac{4}{5}$

接点 $(8, \frac{9}{5})$ のとき $m = -\frac{9(x_1-4)}{25y_1} = -\frac{9(8-4)}{25 \times \frac{9}{5}} = -\frac{4}{5}$ となる