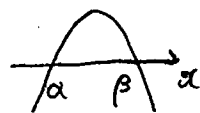


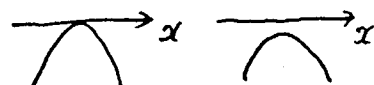
(1) 一般に s, t, u を実数として $sx^2 + tx + u > 0$ - ① を考える

$s < 0$ のとき $sx^2 + tx + u = 0$ が異なる2つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとき、①の解は $\alpha < x < \beta$



$sx^2 + tx + u = 0$ が重解をもつか
実数解をもたないとき

①の解は 解なし



β より大きい x をとれば、その x は①の解とならず

$x > \beta$ をみたさない x が存在する

よって $ax^2 + bx + c > 0$ で $a < 0$ とすれば

$x > \beta$ をみたさない x が存在し

$bx^2 + cx + a > 0$ で $b < 0$ とすれば $x > \beta$ をみたさない x が存在し

$cx^2 + ax + b > 0$ で $c < 0$ とすれば $x > \beta$ をみたさない x が存在する

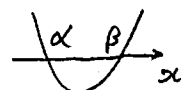
ゆえに a, b, c の少なくとも1つ負であれば $x > \beta$ をみたさない x が存在するので

a, b, c はすべて0以上となる

(2) 一般に s, t, u を実数として $sx^2 + tx + u > 0$ - ① を考える

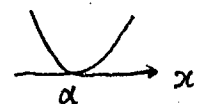
$s > 0$ のとき $sx^2 + tx + u = 0$ が異なる2つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとき ①の解は

$$x < \alpha, \beta < x$$



$sx^2 + tx + u = 0$ が重解 α をもつとき

$$x < \alpha, \alpha < x$$



$sx^2 + tx + u = 0$ が実数解をもたないとき

x はすべての実数



となるので

いずれの場合も $x < \alpha$ となる x は①の解となる

よって $ax^2 + bx + c > 0$, $bx^2 + cx + a > 0$, $cx^2 + ax + b > 0$ の

a, b, c のいずれも正とすると、3つの不等式をみたす $x < q$ (q は実数)

をみたす実数 q が存在する

ゆえに a, b, c はすべて0以上でかつ すべて正ではないので

a, b, c の少なくとも1個は0である

(3) (1)(2)より a, b, c はすべて0以上でかつ少なくとも1個は0である

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 & \text{--- ①} \\ bx^2 + cx + a > 0 & \text{--- ②} \\ cx^2 + ax + b > 0 & \text{--- ③} \end{cases} \quad \text{とする}$$

(i) a, b, c のすべて0のときは ①, ②, ③ の左辺はすべて0になるので
①, ②, ③ はすべて解なしとなって不適

(ii) $a=0, b>0, c>0$ のとき

①は $bx + c > 0$ より $x > -\frac{c}{b}$

②は $x(bx + c) > 0$ より $x < -\frac{c}{b}, 0 < x$

③は $cx^2 + b > 0$ より すべての実数 x が解

よって ①②③ をすべてみたす x の集合は $0 < x$ より $\boxed{p=0}$

a, b, c のうち 1つだけ0で、他の2つは正なら

(ii) と同様になり ①②③ をすべてみたす x の集合は $\boxed{p=0}$

(iii) $a=0, b=0, c>0$ のとき

①は $c > 0$ より すべての実数 x が解

②は $cx > 0$ より $x > 0$

③は $cx^2 > 0$ より $x^2 > 0$ だから $x \neq 0$ のすべての実数が解

よって ①②③ をすべてみたす x の集合は $0 < x$ より $\boxed{p=0}$

a, b, c のうち 2つ0で1つ正なら

(iii) と同様になり ①②③ をすべてみたす x の集合は $\boxed{p=0}$

以上のことから $\boxed{p=0}$ がなりたつ