

1, 2, 3, 4 | 6, 7, 8, 9 | 11, 12, 13, 14 | 16, ...

第1群

第2群

第3群

(1) 第 n 群には $5n-4, 5n-3, 5n-2, 5n-1$ が入るから

その和は $20n-10$

(2) 第 n 群に3の倍数が2つ入るとき、その群の最初と最後の数が3の倍数だから

$$5n-1=3k \quad (k \text{ は整数}) \text{ をとくと}$$

$$5n-3k=1 \quad \text{--- ①}$$

これをみたす (n, k) の1つは $(2, 3)$ であるから

$$5 \times 2 - 3 \times 3 = 1 \quad \text{--- ②} \text{ をみたし}$$

$$\text{①-②より} \quad 5(n-2) - 3(k-3) = 0 \text{ より}$$

$$5(n-2) = 3(k-3) \text{ である}$$

5と3は互いに素より

$$n-2=3l \quad (l \text{ は整数}) \text{ とできるから}$$

$$n=3l+2 \text{ となる. } (l \text{ は整数})$$

但し、 n は自然数だから $n=2, 5, 8, 11, \dots$ となり

$\boxed{\text{初項2, 公差3の等差数列となる.}}$

(3) 30群までのすべての和から、3の倍数が2つ入る群のすべての和を求める

30群までのすべての和は (1) をつかうと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} (20k-10) &= 20 \times \frac{30 \times 31}{2} - 10 \times 30 = 10 \times 30 \times 31 - 10 \times 30 \\ &= 10 \times 30 \times (31-1) \\ &= 10 \times 30 \times 30 = 9000 \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

3の倍数が2つ入る群は $n=3m-1$ (m は自然数) だから

$$\begin{aligned} \text{第}(3m-1)\text{群の総和} &= 20(3m-1) - 10 \\ &= 60m - 30 \end{aligned}$$

よって 第30群まで3の倍数が2つ入る群の総和は

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{10} (60m-30) &= 60 \times \frac{10 \times 11}{2} - 30 \times 10 \\ &= 30 \times 10 \times 11 - 30 \times 10 \\ &= 30 \times 10 \times (11-1) = 30 \times 10 \times 10 = 3000 \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

よって ①-②より 求める和は $9000 - 3000 = \boxed{6000}$ となる