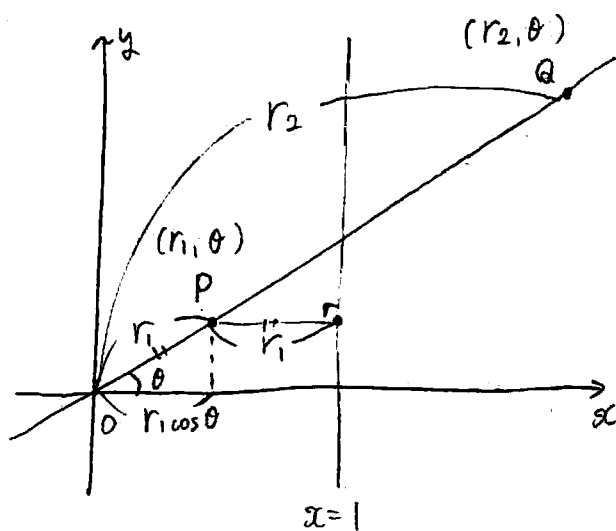




(1) 極座標で $P(r_1, \theta)$, $Q(r_2, \theta)$
 $(r_1 > 0, r_2 > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ とおける

(ii) より $r_1 r_2 = 1$ ①

また (iii) より $r_1 \cos \theta + r_1 = 1$ だから

$$r_1 (1 + \cos \theta) = 1 \text{ であり}$$

$$1 + \cos \theta \neq 0 \text{ より } r_1 = \frac{1}{1 + \cos \theta} \text{ である}$$

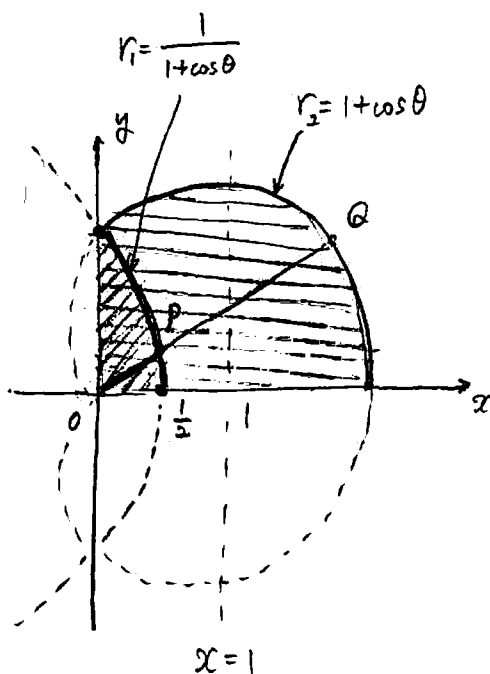
$$\text{よって ①は } \frac{1}{1 + \cos \theta} \times r_2 = 1 \text{ より}$$

$$r_2 = 1 + \cos \theta \text{ となる}$$

ゆえに OQ の長さは $1 + \cos \theta$ である

(2) $P(r_1, \theta)$ は $r_1 = \frac{1}{1 + \cos \theta}$

$Q(r_2, \theta)$ は $r_2 = 1 + \cos \theta$ であるから
 左図のようになる



左図の扇形の微小面積 dS は
 $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ であるから
 求める面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta \text{ であるから}$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2 \cos^2 \frac{\theta}{2})^2} d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \times (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) d\theta$$

$$\therefore \text{ここで } t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ とおくと } dt = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \text{ であるから}$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{2}$
t	0	...	1

$$S = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 + t^2) dt = \frac{1}{4} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \times \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ である}$$

$$\begin{aligned}
 \text{また } T &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_2^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{2} + 1 \\
 &= \boxed{\frac{3}{8}\pi + 1}
 \end{aligned}$$

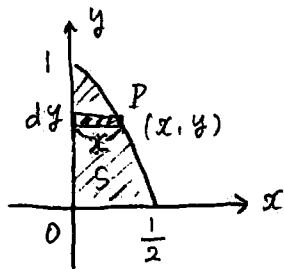
(S, Tの別解) $P(x, y)$ は $(0, 0)$ までと $x=1$ までの距離が等しいので

$$\sqrt{x^2+y^2} = |1-x| \quad \text{より}$$

$$x^2+y^2 = (1-x)^2 \quad \text{だから}$$

$$x^2+y^2 = 1-2x+x^2$$

$$\text{よって } x = \frac{1-y^2}{2} \quad \text{だから}$$



$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 x dy = \int_0^1 \frac{1-y^2}{2} dy \\
 &= \left[\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$Q: \text{つまり } \begin{cases} x = r_2 \cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta = \cos\theta + \cos^2\theta \\ y = r_2 \sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \quad \text{だから} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 dx &= (-\sin\theta + 2\cos\theta \times (-\sin\theta)) d\theta \\
 &= -\sin\theta (1+2\cos\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \cdots & 1 \\ \theta & \frac{\pi}{2} & \cdots & 0 \end{array} \quad \text{より}$$

$$T = \int_0^1 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1+\cos\theta)\sin\theta \cdot (-\sin\theta)(1+2\cos\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta (1+\cos\theta)(1+2\cos\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta (1+3\cos\theta+2\cos^2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2\theta + 3\sin^2\theta \cos\theta + 2(\sin\theta \cos\theta)^2 \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\sin^2\theta \cos\theta + 2 \times \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + 3\sin^2\theta \cos\theta + \frac{1}{2} \times \frac{1-\cos 4\theta}{2} \right\} d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{4}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \sin^3\theta - \frac{1}{16}\cos 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{3}{8}\pi + 1}$$

