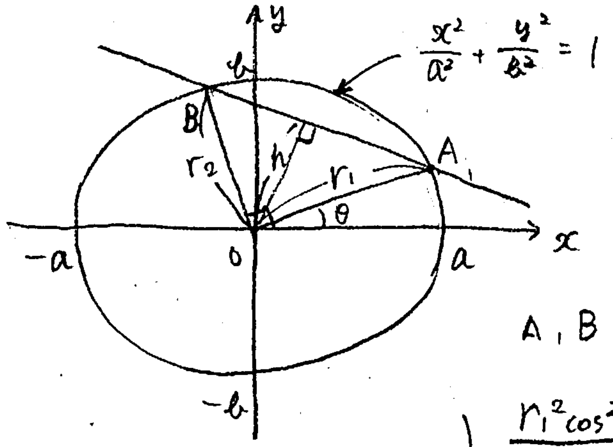

$OA=r_1$, $OB=r_2$ とすると

$A(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta)$、

$B(r_2\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\ r_2\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$

$=(-r_2\sin\theta,\ r_2\cos\theta)$

とおける

A, B は $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ をどちらもみたすので

$$\begin{cases}\dfrac{r_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{r_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1\\[2ex]\dfrac{r_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{r_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1\end{cases}$$ より

$$\begin{cases}\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{r_1^2}=\dfrac{1}{OA^2}\\[2ex]\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{r_2^2}=\dfrac{1}{OB^2}\end{cases}$$ をみたす。

これらを足したして $\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{b^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ より

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ をみたす。 —①

また、$\triangle OAB$ の面積を S とすると

$S=\frac{1}{2}r_1r_2=\frac{1}{2}AB\cdot h$ より

$r_1r_2=\sqrt{r_1^2+r_2^2}\cdot h$

よって $r_1^2r_2^2=(r_1^2+r_2^2)h^2$ より

$$\frac{1}{h^2}=\frac{r_1^2+r_2^2}{r_1^2r_2^2}=\frac{r_1^2}{r_1^2r_2^2}+\frac{r_2^2}{r_1^2r_2^2}$$

$$=\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_1^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OA^2}$$ —②

①②より $\boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\ \text{がなりたつ}}$

(2) ①より $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ だから

$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 　よって $\boxed{h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ $(a>0,\ b>0$ より$)$

となる